10. PRENOVITVENI PROCESI - prenovitvene enačbe

1. Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ prenovitveni proces z medprihodnimi časi $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, za katere velja $\mathrm{P}(T_i = 0) = 0$. Naj bo $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$.

   (a) Privzemi, da je S_{N_t+1} integrabilna za vsak $t \geq 0$. Naj bo $A(t) = \mathrm{E}(S_{N_t+1})$. Dokaži, da $A(t)$ reši naslednjo prenovitveno enačbo

   $$A(t) = \mathrm{E}(T_1) + \int_0^t A(t-x)dF(x),$$

   kjer je F porazdelitvena funkcija spremenljivke T_1.

   (b) Naj bodo medprihodni časi T_i navzgor omejeni. Dokaži, da je potem S_{N_t+1} integrabilna za vsak $t \geq 0$. S pomočjo prenovitvene enačbe iz (a) dokažite, da je

   $$\mathrm{E}(S_{N_t+1}) = \mathrm{E}(T_1)(1 + M(t)),$$

   kjer je $M(t)$ prenovitvena mera procesa N_t.

2. Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ prenovitveni proces in naj bo $v(t) = \mathrm{E}((N_t)^2)$.

   (a) Dokaži, da je

   $$v(t) = M(t) + 2\int_0^t M(t-s)dM(s).$$

   (b) Izračunaj $v(t)$, če je N_t homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ.

3. Naj bo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ prenovitveni proces in naj bo

   $$W = \inf\{t > s;\ N_t = N_{t-s}\}$$

   čas čakanja na prvo pojavitev intervala dolžine vsaj s, ki ne vsebuje prenovitvenega trenutka.

   (a) Dokaži, da za porazdelitveno funkcijo spremenljivke W velja

   $$F_W(x) = \begin{cases} 0 & x < s \\ 1 - F(s) + \int_0^s F_W(x-u)dF(u) & x \geq s \end{cases}$$

   kjer je F porazdelitvena funkcija medprihodne porazdelitve procesa N_t.

   (b) Dokaži, da lahko zvezo iz (a) prepišemo v obliki prenovitvene enačbe

   $$F_W(x) = h(x) + \int_0^x F_W(x-u)dG(u),$$

   kjer je G naraščajoča, $G(0) = 0$ in $G(x) \leq 1$ za vsak $x > 0$.

   (c) Naj bo N_t Poissonov proces z intenzivnostjo λ. Dokaži, da je v tem primeru Laplaceova transformacija spremenljivke W enaka

   $$\mathrm{E}(e^{\theta W}) = \frac{\lambda - \theta}{\lambda - \theta e^{(\lambda-\theta)s}} \quad \text{za } \theta < \lambda.$$

   (d) Izračunaj $\mathrm{E}(W)$.