1. UVOD IZ VERJETNOSTI

1. Dopolni tabelo

	Poissonova porazdelitev $X \sim \text{Pois}(\lambda)$	Eksponentna porazdelitev $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$
Zaloga vrednosti	$\{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}_0$	$[0, \infty)$
Definicija	$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$
Momenta	$\mathrm{E}(X) = \mathrm{D}(X) = \lambda$	$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{D}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$
Rodovna funkcija	$e^{\lambda(s-1)}$	–
Karakteristična funkcija		$\dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
Laplaceva transformacija		
Momentna funkcija		

2. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni Poissonovo s parametroma λ in μ. Dokaži:
   (a) $X + Y$ je porazdeljena Poissonovo s parametrom $\lambda + \mu$.
   (b) Pogojna porazdelitev X ob pogoju $X + Y = n$ je binomska. Določi njena parametra.

3. V žepu imaš N enakih kovancev, kjer je N Poissonova slučajna spremenljivka s parametrom λ. Vsak kovanec vržeš enkrat, pri tem je p verjetnost dogodka, da pade grb. Pokaži, da je skupno število grbov Poissonova slučajna spremenljivka s parametrom λp.

4. Naj ima slučajni vektor (X, Y) skupno rodovno funkcijo

$$G_{(X,Y)}(s, t) = \exp\{\alpha(s - 1) + \beta(t - 1) + \gamma(st - 1)\}$$

   Poišči robne porazdelitve spremenljivk X, Y ter $X + Y$ in pokaži, da sta X in Y vselej porazdeljeni Poissonovo, $X + Y$ pa le v primeru, ko je $\gamma = 0$.

5. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni eksponentno s parametroma λ in μ. Določi gostoto spremenljivke $X + Y$.

6. (a) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne slučajne spremenjivke, vse porazdeljene eksponentno s parametrom λ. Dokaži, da je $X_1 + \cdots + X_n$ porazdeljena po zakonu $\Gamma(\lambda, n)$.
   (b) Naj bosta X in Y neodvisni, porazdeljeni $X \sim \Gamma(\lambda, m)$ in $Y \sim \Gamma(\lambda, n)$, kjer sta m in n naravni števili. Dokaži, da je vsota $X + Y$ porazdeljena po zakonu $\Gamma(\lambda, m + n)$.

7. (a) Naj bo X porazdeljena eksponentno. Dokaži, da je $\mathrm{P}(X > s + x | X > s) = \mathrm{P}(X > x)$ za vsak $x, s \geq 0$. To pomeni, da je eksponentna slučajna spremenljivka X *pozabljiva*.
   (b) Dokaži, da je vsaka zvezna pozabljiva slučajna spremenljivka eksponentna.

8. Naj bosta X in Y neodvisni eksponentni slučajni spremenljivki s parametrom 1 in definirajmo $U = \min\{X, Y\}$ ter $V = \max\{X, Y\}$. Dokaži:
   (a) U je eksponentna s parametrom 2.
   (b) V je porazdeljena enako kot $X + \frac{1}{2}Y$.

   Izračunaj upanji in disperziji spremenljivk U in V.

9. (a) Naj bo X porazdeljena geometrijsko. Dokaži, da je $\mathrm{P}(X = n + k | X > n) = \mathrm{P}(X = k)$ za vsak $k, n \geq 1$. To pomeni, da je geometrijska slučajna spremenljivka X *pozabljiva*.
   (b) Dokaži, da je vsaka nenegativna celoštevilska pozabljiva slučajna spremenljivka geometrijska.

Nekaj uporabnih podatkov:

Binomska porazdelitev $\mathrm{Bin}(n, p)$: $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$; $k = 0, 1, \ldots, n$

Gama porazdelitev $\Gamma(\lambda, n)$: $\hat{F}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + t}\right)^n$

Geometrijska porazdelitev $\mathrm{Geom}(p)$: $\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$; $k = 1, 2, \ldots$