2. UVOD V PROCESE

1. Naj bo $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih, enako prazdeljenih slučajnih spremenljivk, za katere je $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ in $\mathrm{D}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, in naj bo $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje njihovih delnih vsot, določeno z $S_0 = 0$ in $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

   Za pozitivno celoštevilsko spremenljivko N, ki je neodvisna od $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, naj S_N označuje slučajno vsoto, določeno z $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$.

   (a) Dokaži, da je
   $$\mathrm{E}(S_N|N) = \mu N$$
   in
   $$\mathrm{E}(S_N) = \mu\,\mathrm{E}(N).$$

   (b) Dokaži, da je
   $$\mathrm{E}(S_N^2|N) = \sigma^2 N + \mu^2 N^2$$
   in
   $$\mathrm{D}(S_N) = \sigma^2\,\mathrm{E}(N) + \mu^2\,\mathrm{D}(N).$$

2. Naj bo števno mnogo točk razporejenih po ravnini $\mathbb{R}^2$ po naslednjih pravilih:

   - Za odprto množico $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ je število točk $N(A)$ v njej porazdeljeno Poissonovo s parametrom $\mu(A)$, kjer je $\mu(A) = \lambda \mathrm{m}(A)$. Pri tem je $\lambda > 0$, z $\mathrm{m}(\cdot)$ pa označimo Lebesgueovo mero na $\mathbb{R}^2$.
   - Za disjunktne odprte množice $A_1, \dots A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ so $N(A_1), \dots, N(A_k)$ neodvisne.

   (a) Za izbrani r definirajmo množico
   $$B_r = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x\| \leq r\}$$
   in slučajno spremenljivko
   $$D = \inf\{r > 0;\ N(B_r) > 0\}.$$
   Določi porazdelitveno funkcijo in gostoto verjetnosti spremenljivke D.

   (b) Za $u > r$ izračunaj limito $\lim\limits_{r\to 0} \mathrm{P}(N(B_u) = 1 \mid N(B_r) = 1)$.

3. Naj bo $X_1, X_2, \dots$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih zveznih slučajnih spremenljivk s porazdelitveno funkcijo F. Pravimo, da se v času $n > 0$ zgodi *rekord*, ki ima vrednost X_n, če je $X_n > \max\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$. Pri tem privzamemo $X_0 = -\infty$. To pomeni, da se rekord zgodi vsakič, ko dosežemo novo najvišjo vrednost. Privzemi kot znano, da je dogodek $\bigcup_{n\neq m}\{X_m = X_n\}$ skoraj nemogoč.

   (a) Definirajmo slučajne spremenljivke I_j s predpisom
   $$I_j = \begin{cases} 1; & X_j \text{ je rekord} \\ 0; & X_j \text{ ni rekord} \end{cases}$$
   Izračunaj $\mathrm{E}(I_j)$.

(b) Dokaži, da so dogodki $\{I_j = 1\}$ neodvisni.
Nasvet: Vpeljite range spremenljivk.

(c) Naj N_n označuje skupno število rekordov, ki so se zgodili do vključno časa n. Izračunaj $\mathrm{E}(N_n)$ in $\mathrm{D}(N_n)$.

(d) Naj bo

$$T = \min\{n;\ n > 1 \text{ in ob } n \text{ se zgodi rekord}\}.$$

Izračunaj $\mathrm{P}(T > n)$ in pokaži, da je $\mathrm{P}(T < \infty) = 1$ in $\mathrm{E}(T) = \infty$.

(e) Naj T_y označuje čas prvega rekorda, večjega od y To je

$$T_y = \min\{n;\ X_n > y\}.$$

Dokaži, da je spremenljivka T_y neodvisna od X_{T_y}. To je, vrednost prvega rekorda, večjega od y, ni odvisna od časa, ko se to zgodi.