Ime in priimek:____________________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2010/2011

3. izpit

24. avgust 2011

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 13 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\frac{n\operatorname{arctg}(nx)+\frac{\pi}{2}}{nx^2+n}\,dx.$$

2. Naj bodo $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ neodvisne slučajne spremenljivke. Za vsak $k\in\mathbb{N}$ je porazdelitev X_k podana z vejetnostno shemo

$$X_k\sim\begin{pmatrix}-\alpha & 0 & \alpha\\ \frac{1}{2^k} & 1-\frac{1}{2^{k-1}} & \frac{1}{2^k}\end{pmatrix},$$

kjer je α neka pozitivna konstanta. Naj bo $S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n$. Dokažite, da velja

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}}c,$$

kjer je c neka konstanta, in določite c.

3. Naj bodo $Z_1,Z_2,\ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene enakomerno na množici $\{-1,1\}$, t.j.

$$Z_k\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad\text{za vsak } k\in\mathbb{N}.$$

Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo $S_n=Z_1+Z_2+\ldots+Z_n$, $\mathscr{F}_n=\sigma(Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)$ in

$$X_n=\frac{1}{(\cos\lambda)^n}\sin(\lambda S_n),$$

kjer je $\lambda\in\mathbb{R}$ neka konstanta. Dokažite, da je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ martingal glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (t.j. za vsak $n\in\mathbb{N}$ je X_n $\mathscr{F}_n$-merljiva, $E(|X_n|)<\infty$ in velja $\mathrm{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n$).

4. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, za kateri velja:
   - $X-Y$ in X sta neodvisni,
   - $X-Y$ in Y sta neodvisni.

   (a) Naj bosta X in Y iz prostora L^2. Dokažite, da je slučajna spremenljivka $X-Y$ skoraj gotovo konstantna.

   (b) Naj bo f karakteristična funkcija slučajne spremenljivke X in g karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $X-Y$. Dokažite, da velja

$$f(t)|g(t)|^2=f(t),$$

za vsak $t\in\mathbb{R}$.