Ime in priimek: ____________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2011/2012

3. izpit

24. avgust 2012

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 13 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Naj bo $\mathbf{a<0<b}$. S pomočjo dvojnega integrala funkcije
$$f(x,y)=\frac{y}{1+x^2y^2}$$
po primerno izbranem območju izračunajte integral
$$\int_0^\infty \frac{1}{2x^2}\ln\left(\frac{1+b^2x^2}{1+a^2x^2}\right)\,dx.$$

2. Z $2\mathbb{N}$ označimo množico vseh sodih števil. Naj bo
$$\mathscr{F}=\{A\subseteq\mathbb{N}\,|\,\text{bodisi } A\subseteq 2\mathbb{N} \text{ bodisi } A^c\subseteq 2\mathbb{N}\}.$$
Na $\mathscr{F}$ je definirana funkcija μ s predpisom
$$\mu(A)=\begin{cases}0 & \text{za } A\subseteq 2\mathbb{N},\\ 1 & \text{sicer.}\end{cases}$$
   (a) Dokažite, da je $\mathscr{F}$ σ-algebra na naravnih številih.
   (b) Dokažite, da je μ mera na $(\mathbb{N},\mathscr{F})$. Ali je mera μ verjetnostna? Ali je polna?

3. Naj bo $\lambda>0$ in $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ zaporedje slučajnih spremenljivk, kjer je X_n porazdeljena geometrijsko z vrednostmi $0,1,2,\ldots$ s parametrom $\frac{\lambda}{n}$. Dokažite, da zaporedje slučajnih spremenljivk $\left\{\frac{X_n}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ konvergira šibko proti slučajni spremenljivki, ki je porazdeljena eksponentno s parametrom λ.

4. Naj bo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ martingal glede na filtracijo $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dokažite naslednje trditve.
   (a) Za vsak $m>n$ je $\mathrm{E}(X_m|\mathscr{F}_n)=X_n$.
   (b) Za vsak $n\in\mathbb{N}$ je $\mathrm{E}(X_n)=\mathrm{E}(X_1)$.
   (c) Za vsak $m>n$ je $\mathrm{cov}(X_n,X_m)=D(X_n)$.