Ime in priimek:____________________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Vrsta:_____________ Sedež:________

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2012/2013

3. izpit

29. avgust 2013

Naloge rešujte samostojno. Dovoljena pripomočka sta dva A4 lista z definicijami ter izreki s predavanj in vaj, na katerih ne smejo biti rešene naloge. H kolokviju sta priložena lista "Osnove teorije mere" in dodatni prazni list. Na vse dobljene liste se morate ob začetku reševanja podpisati in jih ob zaključku oddati. Če ne želite, da vam del vsebine dodatnega lista ocenim, to napišite na list. Čas reševanja kolokvija je 90 minut z možnostjo podaljšanja.

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 13 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{n+1}{n}}^{3}\frac{n\cos\frac{x}{n}+nxe^{\frac{x}{n}}}{nx+3}\,dx.$$

2. Naj bo c neka pozitivna konstanta in μ mera na merljivem prostoru $(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N}))$, definirana s predpisom

$$\mu(A)=c\sum_{k\in A}\frac{1}{3^k}$$

za $A\subseteq\mathbb{N}$. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo $f_n(k)=\frac{1}{n}\chi_{\{1,2,\dots,n\}}(k)$, kjer je $k\in\mathbb{N}$.
   (a) Določite konstanto c tako, da bo mera μ verjetnostna.
   (b) Naj bo c kot v točki (a). Ali $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 v prostoru $\mathrm{L}^p(\mu)$ za kakšen $p\in(0,\infty)$? Če da, za katere p?
   (c) Naj bo c kot v točki (a). Ali konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj gotovo proti 0?

3. Naj bodo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zvezne slučajne spremenljivke. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ je gostota X_n podana s predpisom

$$f_n(x)=\begin{cases} n2^{-n}x^{n-1} & \text{za } x\in[0,2],\\ 0 & \text{sicer.}\end{cases}$$

Ali zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po zakonu k neki slučajni spremenljivki X. Če je odgovor da, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X?

4. Naj bosta slučajni spremenljivki X in Y iz L^2. Naj bo $\mathrm{E}(X|Y)=aY+b$ za neki realni konstanti a in b.
   (a) Naj bo $\mathrm{D}(Y)>0$. Dokažite, da je tedaj $a=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(Y)}$ in $b=\mathrm{E}(X)-\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(Y)}\mathrm{E}(Y)$.
   (b) Določite a in b, če je $\mathrm{D}(Y)=0$.