STATISTIKA 1

1. izpit

12. februar 2010

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna številka: ____________________

Naloga	Odstotki
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj odstotkov	

---

1. naloga [25 točk]
Naj bo $X_0, X_1, \dots$ zaporedje slučajnih spremenljivk z vrednostmi na intervalu $[0,1]$ in $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$. Predpostavimo, da je $X_0 = a \in [0,1]$ in velja

$$P(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} | \mathcal{F}_n) = 1 - X_n$$
$$P(X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2} | \mathcal{F}_n) = X_n.$$

(a) Pokažite, da je $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingal.

(b) Pokažite: $E[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4} E[X_n(1 - X_n)]$.

2. naloga [30 točk]
Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor z mero. Definirajmo množico

$$\mathcal{M}^* = \{E \subset X; \exists A_E \in \mathcal{M}, B_E \in \mathcal{M} \ni: A_E \subset E \subset B_E \text{ in } \mu(B_E - A_E) = 0\}.$$

(a) Dokažite, da je $\mathcal{M}^*$ σ-algebra. Ali velja $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$?

(b) S predpisom $\mu^*(E) = \mu(A_E)$ naj bo definirana preslikava $\mathcal{M}^* \to [0, \infty)$. Dokažite, da je ta preslikava mera na σ-algebri $\mathcal{M}^*$.

(c) Ali je mera μ^* kompletna? Utemeljite!

3. naloga [25 točk]
Naj bosta slučajni spremenljivki X_n in Y_n neodvisni za vsak $n \in \mathbb{N}$ ter naj velja $X_n \sim Bin(n, p)$ in $Y_n \sim Bin(3n, p)$.

(a) Poiščite porazdelitev h kateri konvergira zaporedje $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} - \frac{Y_n - 3np}{\sqrt{3np(1-p)}}$ po zakonu z rastočim n.

(b) Izračunajte $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{X_n}{n} - p| > |\frac{Y_n}{3n} - p|)$.
Namig: Za neodvisni standardno normalno porazdeljeni slučajni spremenljivki U in V velja: $\frac{U}{V}$ $Cauchy$.

4. naloga [30 točk]
Naj bodo $Z_1, Z_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene celoštevilske slučajne spremenljivke. Označimo z f karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke Z_1.

(a) Pokažite: $P(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^n dt$.

(b) Naj bo $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{2}$ in $P(Z_1 = 1) = P(Z_1 = -1) = \frac{1}{4}$.
Pokažite: $\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0) = \infty$.