Ime in priimek: ____________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2010/2011

1. izpit

11. februar 2011

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 13 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{n+1}{nx^2+n+1}e^{-\frac{x}{n}}\,dx.$$

2. Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor z mero. Simetrična razlika množic A in B je podana z $A \circ B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
   (a) Dokažite: če za $A, B \in \mathscr{F}$ velja $\mu(A \circ B) = 0$, potem je $\mu(A) = \mu(B)$.
   (b) Dokažite, da je s predpisom $d(A, B) = \mu(A \circ B)$ podana kvazimetrika na σ-algebri $\mathscr{F}$ (t. j. za vse $A, B, C \in \mathscr{F}$ velja $d(A, B) \geq 0$, $d(A, A) = 0$, $d(A, B) = d(B, A)$ in $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$).

3. Ali sta funkciji $f(t) = \frac{4-\sin^2(t)-2\sin^2(2t)}{4}$ in $g(t) = \cos(t^2)$ karakteristični funkciji kakšne slučajne spremenljivke? Če je odgovor da, opišite kako je porazdeljena pripadajoča slučajna spremenljivka. Če je odgovor ne, utemeljite zakaj ni.
   Namig (v primeru, da se odločite dokazovati, da katera od funkcij ni karakteristična funkcija nobene slučajne spremenljivke): predpostavite, da funkcija je karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke in izračunajte upanje ter disperzijo te slučajne spremenljivke.

4. Naj bodo $Z_1, Z_2, \ldots$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke, za katere za vsak $i = 1, 2, \ldots$ velja $\mathrm{E}(Z_i) = 0$ in $\mathrm{E}(Z_i^2) = \sigma^2 < \infty$. Naj bo $S_n = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ in
$$X_n = S_n^2 - \sigma^2 n$$
   za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokažite, da je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ martingal glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (t. j. za vsak $n \in \mathbb{N}$ je X_n $\mathscr{F}_n$-merljiva, $E(|X_n|) < \infty$ in velja $E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n$).