Ime in priimek:________________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2011/2012

1. izpit

6. februar 2012

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 13 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{n}{n+1}}^{2}\frac{(x+n)e^{\frac{x}{n}}}{nx+1}\,dx.$$

2. Naj bodo $Z_1, Z_2, \dots$ neodvisne slučajne spremenljivke. Za vsak $k\in\mathbb{N}$ je porazdelitev Z_k podana z vejetnostno shemo
$$Z_k \sim \begin{pmatrix} -c_k & 0 & c_k \\ \frac{1}{2^{k+1}} & 1-\frac{1}{2^{k-1}} & \frac{3}{2^{k+1}} \end{pmatrix},$$
kjer je c_k neka pozitivna realna konstanta. Naj bo $\mathscr{F}_n=\sigma(Z_1,Z_2,\dots,Z_n)$ in
$$X_n=\prod_{k=1}^{n}Z_k$$
za vsak $n\in\mathbb{N}$. Določite $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako, da bo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ martingal glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Naj bo $(\Omega,\mathscr{F})$ merljiv prostor.
   (a) Naj bo $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje merljivih funkcij na Ω. Dokažite, da je množica vseh točk $\omega\in\Omega$, v katerih je zaporedje $\{f_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ naraščajoče, merljiva.
   (b) Naj bo $\emptyset\neq E\subseteq\Omega$ in
   $$\mathscr{M}=\{A\subseteq\Omega \,|\, \text{obstaja tak } B\in\mathscr{F},\ \text{da je } A=B\cap E\}.$$
   Dokažite, da je $\mathscr{M}$ σ-algebra na množici E.

4. Interval $[0,1]$ razdelimo na r paroma disjunktnih podintervalov z dolžinami $p_1,p_2,\dots,p_r$. Naj bodo $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ neodvisne slučajne spremenljivke, vse porazdelene enakomerno zvezno na intervalu $[0,1]$. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ in $i\in\{1,2,\dots,r\}$ označimo z $Z_n(i)$ število slučajnih spremenljivk izmed $\{X_k\}_{k=1}^{n}$, ki ležijo v i-tem podintervalu (katerega dolžina je p_i). Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo
$$R_n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{Z_n(i)}.$$
Dokažite, da velja
$$\frac{\ln R_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.g.}}\sum_{i=1}^{r}p_i\ln(p_i).$$