Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Predavalnica: ________ Vrsta: ________ Sedež: ________

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)
Statistika I, 1. del 2013/2014
1. izpit
5. februar 2013

Naloge rešujte samostojno. Dovoljena pripomočka sta le dva A4 lista z definicijami ter izreki s predavanj in vaj, na katerih ne smejo biti napisane rešene naloge in dokazi. K izpitu je priložen list "Osnove teorije množic" in dodatna prazna lista. Na izpit se morate ob začetku reševanja podpisati in ga ob zaključku oddati. Če ne želite, da vam del vsebine dodatnega lista ocenim, to napišite na list. Čas reševanja kolokvija je 90 minut z možnostjo podaljšanja.

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 13 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{n-1}{n}}^{\infty}\cos\frac{x}{n}\left(e^{-nx}+\frac{nx-\sqrt{n}x}{nx^3+x^2+nx}\right)dx.$$

2. Naj bo slučajna spremenljivka X porazdeljena eksponentno s parametrom 1 in naj bo P_X njen porazdelitveni zakon. Na prostoru z verjetnostno mero $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),P_X)$ naj bo za vsak $n\in\mathbb{N}$ definirana funkcija $f_n(x)=n\chi_{[1,1+\frac{1}{n}]}(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
   (a) Ali konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj gotovo proti 0?
   (b) Ali $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 v prostoru $\mathrm{L}^p(P_X)$ za kakšen $p\in(0,\infty)$? Če da, za katere p?
   (c) Brez uporabe izreka o odnosih med različnimi načini konvergenc utemeljite, ali konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verjetnostno proti 0.

3. Naj bo $\mathscr{F}$ neka σ-algebra na realnih številih. Dokažite, da je $\mathscr{B}(\mathbb{R})\subseteq\mathscr{F}$ natanko tedaj, ko je vsaka zvezna funkcija $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ merljiva glede na $\mathscr{F}$.

4. Naj bo $(\Omega,\mathscr{F},P)$ verjetnostni prostor in zaporedje σ-podalgeber $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ filtracija. Naj bosta $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ podmartingala glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo $Z_n=\max\{X_n,Y_n\}$. Dokažite, da je $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ podmartingal glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$.