Ime in priimek:__________________________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2012/2013

1. izpit

6. februar 2013

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 13 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\frac{2n+1}{n}} \frac{(n^2x+1)\sin\frac{x}{n}}{nx^4+x}\,dx.$$

2. Naj bo mera μ na merljivem prostoru $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ definirana s predpisom
$$\mu(A) = \sum_{k\in A}\frac{1}{2^k}$$
za $A\subseteq\mathbb{N}$. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo $f_n(k) = 2^n\chi_{\{n\}}(k)$, kjer je $k\in\mathbb{N}$.
   (a) Dokažite, da je mera μ verjetnostna.
   (b) Ali $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 v prostoru $\mathrm{L}^p(\mu)$ za kakšen $p\in(0,\infty)$? Če da, za katere p?
   (c) Ali konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj gotovo proti 0?

3. Naj bodo $\{Z_k\}_{k=1}^\infty$ neodvisne slučajne spremenljivke. Za vsak $k\in\mathbb{N}$ je porazdelitev Z_k podana z verjetnostno shemo
$$Z_k \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & k \\ p & 1-p \end{pmatrix},$$
kjer je $p\in(0,1)$. Naj bo $\mathscr{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ in
$$X_n = \ln\left(\prod_{k=1}^n Z_k\right)$$
za vsak $n\in\mathbb{N}$. Določite p tako, da bo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ martingal glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Naj bodo $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ neodvisne identično porazdeljene slučajne spremenljivke z vsemi končnimi momenti. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Brez uporabe zakonov velikih števil dokažite, da $\frac{S_n}{n}$ konvergira šibko proti $\mathrm{E}(X_1)$.