STATISTIKA 1

2. izpit

1. junij 2010

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna številka: ____________________

Naloga	Odstotki
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj odstotkov	

---

1. naloga [25 točk]
Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih slučajnih spremenljivk z matematičnim upanjem $E(X_i) = 0$ in disperzijo $D(X_i) = \sigma^2$ za vsak $i = 1, 2, \ldots$
Dokažite:

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i<j;i,j=1}^{n} X_i X_j$$

konvergira verjetnostno proti 0. Namig: $D(\sum_{i=1}^{N} Y_i) = \sum_{i=1}^{N} D(Y_i) + 2\sum_{i<j} Cov(Y_i, Y_j)$.

2. naloga [25 točk]

(a) Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $f : \Omega \to \mathbb{R}$ neka realna funkcija. Pokažite, da je f merljiva funkcija natanko tedaj, ko za vsako realno število $a \in \mathbb{R}$ velja $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{F}$. Namig: $\mathcal{M} = \{A \in [-\infty, \infty] | f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ je monotoni razred.

(b) Naj za realno funkcijo f velja

$$\{\omega \in \Omega \,|f(\omega) \geq R\} \in \mathcal{F}; \quad \forall R \in \mathbb{Q}.$$

Dokažite, da je funkcija f merljiva.

3. naloga [25 točk]
Negativna binomska porazdelitev je diskretna verjetnostna porazdelitev Bernoullijevih poskusov (dva možna izida: uspeh, neuspeh), v katerih želimo dobiti vnaprej določeno število uspehov r. $X \sim NegBin(r,p)$ je slučajna spremenljivka, ki meri število neuspehov pred r-tim uspehom. Njena funkcija verjetnosti je dana z:

$$p_k = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k; \quad k \in \{0,1,2,\ldots\}; 0 < p < 1; r > 0.$$

(a) Po definiciji izpeljite karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $X \sim NegBin(r,p)$.
Namig: $\frac{1}{(1-x)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{s-1} x^k$.

(b) Slučajno spremenljivko $X \sim NegBin(r,p)$ zapišite kot končno vsoto neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z znano karakteristično funkcijo. S pomočjo tega dejstva preverite točko (a).

(c) S pomočjo centralnega limitnega izreka pokažite, da lahko za velik r zgornjo porazdelitev aproksimiramo z normalno porazdelitvijo. Katera je ta porazdelitev?

4. naloga [25 točk]

(a) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ take slučajne spremenljivke, da so njihove delne vsote S_n martingali. Pokažite, da v tem primeru za vsak par $i \neq j$ velja $E(X_i X_j) = 0$.

(b) Naj bo $X_0, X_1, X_2, \ldots$ zaporedje slučajnih spremenljivk iz L^1, za katere velja

$$E(X_{n+1}|X_0, X_1, \ldots, X_n) = aX_n + bX_{n-1}$$

za vsak $n \geq 1$, kjer $0 < a, b < 1$ in $a + b = 1$.
Poiščite tak α, da bo $S_n = \alpha X_n + X_{n-1}$ martingal glede na množico slučajnih spremenljivk $\{X_0, X_1, X_2, \ldots X_n\}$.