

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani  
 Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)  
**Statistika I, 1. del 2010/2011**  
**2. izpit**  
 3. junij 2011

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 13 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{n+x}{\sqrt{n^2x+1}} e^{-\frac{x}{n}} dx.$$

2. (a) Ali je funkcija  $f(t) = \frac{2\cos(3t) - \sin^2(t)}{2}$  karakteristična funkcija kakšne slučajne spremenljivke? Če je odgovor da, opišite kako je porazdeljena pripadajoča slučajna spremenljivka. Če je odgovor ne, utemeljite zakaj ni.
- (b) Naj bo  $X$  zvezna slučajna spremenljivka z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{za } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunajte karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke  $X$ .

3. Naj bodo  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$  neodvisne slučajne spremenljivke. Za vsak  $k \in \mathbb{N}$  je porazdelitev  $X_k$  podana z vejnostno shemo

$$X_k \sim \begin{pmatrix} -\alpha k & 0 & \alpha k \\ \frac{1}{2^k} & 1 - \frac{1}{2^{k-1}} & \frac{1}{2^k} \end{pmatrix},$$

kjer je  $\alpha$  neka pozitivna konstanta. Naj bo  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Dokažite, da velja

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} c,$$

kjer je  $c$  neka konstanta, in določite  $c$ .

4. Naj bodo  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$  neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke in naj bo  $N$  neka pozitivna celoštevilka slučajna spremenljivka, ki je neodvisna od  $X_k$  za vsak  $k \in \mathbb{N}$ . Naj bo

$$S = \sum_{k=1}^N X_k.$$

Dokažite, da velja

$$D(S) = D(X) E(N) + E(X)^2 D(N),$$

kjer je slučajna spremenljivka  $X$  enako porazdeljena kot  $X_k$ .