Ime in priimek:____________________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Vrsta:____________ Sedež:________

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2012/2013

2. izpit

28. junij 2013

Naloge rešujte samostojno. Dovoljeni pripomoček sta dva A4 lista z definicijami ter izreki s predavanj in vaj, na katerih ne smejo biti rešene naloge. H kolokviju sta priložena lista "Osnove teorije mere" in dodatni prazni list. Na vse dobljene liste se morate ob začetku reševanja podpisati in jih ob zaključku oddati. Če ne želite, da vam del vsebine dodatnega lista ocenim, to napišite na list. Čas reševanja kolokvija je 90 minut z možnostjo podaljšanja.

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 13 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{2n-1}{n}}^{n^2}\frac{2e^{-n^2x}+n\sin\frac{x}{n}+n-1}{nx^2+1}\,dx.$$

2. Na množici $[0,\infty)$ imamo σ-algebro
$$\mathscr{F}=\{E\subseteq[0,\infty)\,|\,\text{bodisi } E \text{ števna bodisi } E^c \text{ števna}\}.$$
Na $\mathscr{F}$ je definirana mera μ s predpisom
$$\mu(E)=\begin{cases}0; & \text{če je } E \text{ števna,}\\ 1; & \text{če je } E^c \text{ števna.}\end{cases}$$
Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo
$$f_n=\chi_{\{0,1,\dots,n\}}+(-1)\cdot\chi_{[0,\infty)\setminus\mathbb{N}_0}$$
in $g=\chi_{[0,1]}$, vse funkcije na $[0,\infty)$.
   (a) Dokažite, da je f_n merljiva za vsak $n\in\mathbb{N}$. Ali je tudi funkcija g merljiva?
   (b) Ali konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj gotovo proti -1?
   (c) Ali $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti -1 v prostoru $L^1(\mu)$?

3. (a) Naj bo Y porazdeljena Bernoullijevo s parametrom $p\in(0,1)$. Izračunajte karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke Y.
   (b) Naj bo Y_n porazdeljena binomsko s parametroma n in $p\in(0,1)$. Izračunajte karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke Y_n.
   (c) Naj bo $\lambda>0$ in $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje slučajnih spremenljivk, kjer je X_n porazdeljena binomsko s parametroma n in $\frac{\lambda}{n}$. Dokažite, da zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira šibko proti slučajni spremenljivki, ki je porazdeljena Poissonovo s parametrom λ.

4. Naj bo $(\Omega,\mathscr{F},P)$ verjetnostni prostor in zaporedje σ-podalgeber $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ filtracija. Nadalje naj bo $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$ zaporedje slučajnih spremenljivk iz L^1. Za vsak $k\in\mathbb{N}$ naj bo Z_k $\mathscr{F}_k$-merljiva. Za vsak $n\geq 2$ naj bo
$$X_n=\sum_{k=2}^{n}\left(Z_k-\mathrm{E}(Z_k|\mathscr{F}_{k-1})\right).$$
Dokažite, da je $\{X_n\}_{n=2}^{\infty}$ martingal glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n=2}^{\infty}$.