Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2011/2012

2. izpit

28. maj 2012

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 13 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{2}{n}}^{1}\frac{n^2\sin\frac{x}{n}}{nx-1}\,dx.$$

2. Naj bo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo X_n porazdeljena eksponentno s parametrom n. Brez uporabe implikacij med različnimi vrstami konvergenc odgovorite na naslednja vprašanja.
   (a) Ali zaporedje $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 v prostoru $\mathrm{L}^p(P)$ za kakšen $p\in(0,\infty)$? Če da, za katere p?
   (b) Ali $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira verjetnostno proti 0?
   (c) Ali $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po zakonu proti 0?

3. Naj bodo $Z_1, Z_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, katerih porazdelitev je podana z verjetnostno shemo
$$Z_k \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix} \quad \text{za vsak } k\in\mathbb{N},$$
kjer je $p\in[0,1]$ poljuben. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo $S_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ neka konstanta in $X_1 = \cos(\lambda Z_1)$. Za vsak $n \geq 2$ naj bo
$$X_n = c_n\cos(\lambda S_n),$$
kjer je c_n neka realna konstanta. Določite p in $\{c_n\}_{n=2}^{\infty}$ tako, da bo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ martingal glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor s končno mero.
   (a) Dokažite, da za poljubni množici $A, B\in\mathscr{F}$ velja
$$\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A\cap B).$$
   (b) Naj bo množica $A\in\mathscr{F}$ taka, da je $\mu(A) = \mu(\Omega)$. Dokažite, da za poljubno množico $B\in\mathscr{F}$ velja
$$\mu(B) = \mu(A\cap B).$$
   Ali velja to tudi v primeru, ko je $\mu(\Omega) = \infty$? Dokažite ali ovrzite s protiprimerom.