STATISTIKA 1

3. izpit

13. september 2010

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna številka: ____________________

Naloga	Odstotki
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj odstotkov	

---

1. naloga [30 točk]
Naj bosta X in Y neodvisni in enako porazdeljeni slučajni spremenljivki z matematičnim upanjem $E(X) = E(Y) = 0$ in disperzijo $D(X) = D(Y) = 1$. Naj ima tudi slučajna spremenljivka $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ enako porazdelitev kot X in Y. Pokažite, da je slučajna spremenljivka X porazdeljena standardno normalno.

Namig: Z indukcijo pokažite, da velja $f_X(t) = f_X(t2^{-n/2})^{2^n}$.

2. naloga [25 točk]
Naj bo $\{X_n\}$ zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk, ki konvergirajo k 0 po točkah. Naj obstaja taka konstanta M, da je $\int_\Omega \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} dP \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pokažite, da je $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = 0$.

3. naloga [25 točk]

(a) Naj bodo slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne in vse porazdeljene zvezno enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Pokažite, da $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{X_k}}$ verjetnostno konvergira k 2.

(b) Naj zaporedji slučajnih spremenljivk $\{X_n\}$ in $\{Y_n\}$ konvergirata verjetnostno proti 0. Pokažite, da tedaj tudi zaporedji $\{X_n + Y_n\}$ in $\{X_n Y_n\}$ konvergirata verjetnostno proti 0.

4. naloga [25 točk]

(a) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ take slučajne spremenljivke, da so njihove delne vsote S_n martingali. Pokažite, da v tem primeru za vsak par $i \neq j$ velja $E(X_i X_j) = 0$.

(b) Naj bo $X_0, X_1, X_2, \ldots$ zaporedje slučajnih spremenljivk iz L^1, za katere velja

$$E(X_{n+1} | X_0, X_1, \ldots, X_n) = aX_n + bX_{n-1}$$

za vsak $n \geq 1$, kjer $0 < a, b < 1$ in $a + b = 1$.
Poiščite tak α, da bo $S_n = \alpha X_n + X_{n-1}$ martingal glede na množico slučajnih spremenljivk $\{X_0, X_1, X_2, \ldots X_n\}$.