

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
 Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)
Statistika I, 2. del 2011/2012
2. izpit
 28. avgust 2012

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 25%. Veliko uspeha!

1. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in X_1, X_2, \dots, X_n slučajni vzorec z gostoto

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{za } x \in (0, \theta), \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

kjer je parameter $\theta > 0$. Naj bodo Y_1, Y_2, \dots, Y_n pripadajoče vrstilne statistike.

- (a) Kolikšna mora biti velikost vzorca, da velja $P(Y_1 > \frac{\theta}{2}) > 1/2$?
- (b) Poiščite gostoto skupne porazdelitve slučajnega vektorja $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})$.
2. Naredili so raziskavo o učinkovitosti nekega novega antidepresiva. V ta namen so izbrali 200 ljudi, ki trpijo za simptomi depresije. Razdelili so jih v dve skupini po 100 ljudi. Pacientom v prvi skupini so dali zdravilo, pacientom v drugi skupini pa placebo. Po treh mesecih jemanja zdravila oz. placeba, so na podlagi testov in mnenja bolnika določili, ali se je njegovo stanje izboljšalo ali poslabšalo ali pa je ostalo nespremenjeno. V prvi skupini (zdravilo) se je 55-im bolnikom stanje izboljšalo, 34-im poslabšalo in pri 11-ih je ostalo nespremenjeno. V drugi skupini (placebo) se je 42-im bolnikom stanje izboljšalo, 5-im poslabšalo in pri 53-ih je ostalo nespremenjeno.
- (a) Z izračunom primerne dvostranskega intervala zaupanja utemeljite, ali lahko s 95% gotovostjo trdimo, da je več izboljšanj stanja v skupini, ki jemlje zdravilo, kot v skupini, ki jemlje placebo.
- (b) Z izračunom primerne enostranskega intervala zaupanja utemeljite, ali lahko s 95% gotovostjo trdimo, da se je v prvi skupini (zdravilo) večim bolnikom stanje izboljšalo kot poslabšalo.
3. Nekateri ribiči lovijo postrvi tako, da stojijo na kopnem; drugi pa tako, da lovijo iz čolna. Izkušeni ribiči pravijo, da je postv lažje uloviti, če stojiš na obali. Da bi to domnevo preverili, so izračunali, koliko ur v povprečju so lovili eno ribo v posameznem mesecu leta 2011 (maj do september). Podatki so podani v spodnji tabeli.

mesec lovljenja	maj	junij	julij	avgust	septem-ber
čoln	3.6	3.9	3.2	2.0	1.6
obala	3.0	3.3	2.2	1.6	1.7

Predpostavite, da sta oba vzorca porazdeljena normalno. Pri stopnji značilnosti 0.05 testirajte, ali res drži domneva izkušenih ribičev. Izrazite moč testa s primerno porazdelitveno funkcijo. Kolikšna je moč testa v vrednosti 0.2? Slednji rezultat izrazite s pomočjo $F(a)$, kjer je F primerna porazdelitvena funkcija in a realno število. Na enak način izrazite tudi P -vrednost testa.

4. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in X_1, X_2, \dots, X_n slučajni vzorec z gostoto

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} x^{\beta-1} e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}} & \text{za } x > 0, \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

kjer $\alpha > 0$ neznani parameter in $\beta > 0$ znan parameter.

- (a) Izračunajte cenilko največjega verjetja $\hat{\alpha}$ za parameter α . Pokažite, da je cenilka nepristranska.
- (b) Izračunajte Rao-Cramerjevo mejo za cenilko $\hat{\alpha}$. Ali je $\hat{\alpha}$ najbolj učinkovita?