

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
 Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)
Statistika I, 2. del 2010/2011
1. izpit
 27. junij 2011

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 25%. Veliko uspeha!

1. Naj bo X_1, X_2, X_3, X_4 slučajni vzorec z gostoto

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{za } x > \theta, \\ 0 & \text{za } x \leq \theta, \end{cases}$$

kjer je θ poljubno realno število. Naj bodo Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 pripadajoče vrstilne statistike.

- (a) Določite konstanto c (odvisno od θ), za katero velja $P(Y_1 < c) = 0.9$.
 (b) Poiščite gostoto skupne porazdelitve slučajnega vektorja (Y_1, Y_2, Y_3) .
2. V nekem vrtnarstvu preizkušajo, ali vrtnice hitreje rastejo v zemlji proizvajalca A ali B (hitrost rasti vrtnice merijo tako, da izmerijo, koliko milimetrov je vrtnica zrasla v enem mesecu). Izvedejo naslednja dva poskusa.
- (a) V zemljo proizvajalca A posadijo prvo skupino petih vrtnic in v zemljo proizvajalca B posadijo drugo skupino petih vrtnic. Meritve po enem mesecu so sledeče.

zemlja A 27 25 22 28 21

zemlja B 14 18 24 20 22

- (b) Potem vrtnice iz prve skupine (za katere že imajo meritve rasti v zemlji proizvajalca A) presadijo v zemljo proizvajalca B in po nadaljnjem mesecu v enakem zaporedju izmerijo vrtnice:

23 20 15 26 16.

Predpostavimo, da so vse skupine podatkov porazdeljen normalno, z enakimi disperzijami. Z izračunom primernih 95% dvostranskih intervalov zaupanja utemeljite, ali lahko sklepamo, da je zemlja proizvajalca A boljša od zemlje proizvajalca B glede na poskus v točki (a) in glede na poskus v točki (b).

3. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in X_1, X_2, \dots, X_n slučajni vzorec z gostoto

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{x-1} & \text{za } x \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

kjer je neznan parameter $\theta \geq 1$ (slučajni vzorec je porazdeljen geometrijsko s parametrom $\frac{1}{\theta}$).

- (a) Izračunajte cenilko največjega verjetja $\hat{\theta}$ za parameter θ . Pokažite, da je cenilka nepristranska.
 (b) Izračunajte Rao-Cramerjevo mejo za cenilko $\hat{\theta}$. Ali je $\hat{\theta}$ najbolj učinkovita?
Uporabite lahko dejstvo, da ima slučajna spremenljivka, ki je porazdeljena geometrijsko s parametrom p , upanje enako $\frac{1}{p}$ in disperzijo $\frac{1-p}{p^2}$.

4. (a) Izid poskusa razporedimo v r kategorij z verjetnostmi p_1, p_2, \dots, p_r . Naj bo n število ponovitev poskusa in X_k število opazovanj, ki padejo v k -to kategorijo, $k = 1, 2, \dots, r$. Opiši, kako bi testirali skladnost podatkov s porazdelitvijo (p_1, p_2, \dots, p_r) pri stopnji značilnosti α , če želimo zaznati manipulacijo podatkov s stopnjo značilnosti $\beta \in (0, \alpha)$.
- (b) Navihani Tonček je sam naredil igralno kocko, za katero bi rad dokazal, da je poštena. S tem namenom je vrgel kocko 180-krat in dobil naslednje rezultate.

število pik	1	2	3	4	5	6
število metov	32	31	29	30	28	33

S testom iz točke (a) testirajte, ali je Tončkova kocka poštena, če je $\alpha = 0.035$ in $\beta = 0.025$.

- (c) Ker sumimo, da je Tonček naredil kocko, ki je obtežena pri šestici, sami 180-krat vržemo kocko in dobimo naslednje rezultate.

število pik	1	2	3	4	5	6
število metov	24	27	30	31	27	41

Pri stopnji značilnosti 0.05 testirajte, ali je verjetnost, da pade šestica prevelika za pošteno igralno kocko. Izračunajte tudi P -vrednost testa.