

Ime in priimek: _____ Vpisna številka:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vrsta: _____ Sedež: _____

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)
Statistika I, 2. del 2012/2013
2. izpit
5. september 2013

Naloge rešujte samostojno. Dovoljeni pripomočki so kalkulator in dva A4 lista z definicijami ter izreki s predavanj in vaj, na katerih ne smejo biti rešene naloge. H kolokviju so priloženi štirje listi s tabelami porazdelitev, list "Testiranje upanja" in dodatni prazni list. Na vse dobljene liste se morate ob začetku reševanja podpisati in jih ob zaključku oddati. Če ne želite, da vam del vsebine dodatnega lista ocenim, to napišite na list. Čas reševanja kolokvija je 90 minut z možnostjo podaljšanja.

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 25%. Veliko uspeha!

1. Na dveh srednjih šolah imajo sistematski pregled, na katerem dijake tudi stehtajo. Iz vsake srednje šole naključno izberejo pet dijakov. Njihove teže v kilogramih so podane v spodnji tabeli.

srednja šola A	73.8	50.9	56.9	65.3	60.4
srednja šola B	72.0	65.5	66.7	75.1	73.0

Predpostavimo, da sta teža dijakov šole A in teža dijakov šole B porazdeljeni normalno z enakima disperzijama.

- (a) Z izračunom primernega intervala zaupanja utemeljite, ali lahko na podlagi zgornjih meritev s 95% gotovostjo trdimo, da je povprečna teža dijakov na srednji šoli B večja od 65 kg.
- (b) Z izračunom primernega intervala zaupanja utemeljite, ali lahko na podlagi zgornjih meritev z 90% gotovostjo trdimo, da je povprečna teža dijakov na srednji šoli B večja od povprečne teže dijakov na šoli A.
2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in X_1, X_2, \dots, X_n slučajni vzorec z gostoto

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}} & \text{za } x > a, \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

kjer je $\theta \in (1, \infty)$ neznan parameter in $a \in (0, \infty)$ znani parameter.

- (a) Izračunajte momentno cenilko za neznan parameter θ .
- (b) Izračunajte cenilko največjega verjetja za neznan parameter θ .
3. Šestnajstkrat vržemo pravilni tetraeder (stranice so označene z 1, 2, 3 in 4). Sumimo, da je tetraeder obtežen ob ploskvi 1. V spodnji tabeli je podano število metov, v katerih je tetraeder padel na posamezno ploskev.

ploskev	1	2	3	4
število metov	8	2	2	4

- (a) Pri stopnji značilnosti 0.10 testirajte, ali je verjetnost, da pade tetraeder na prvo ploskev, res prevelika za pošten tetraeder. Izračunajte še p -vrednost.
- (b) Določite tip napake in izračunajte verjetnost napake uporabljenega testa, če je prava verjetnost meta na prvo ploskev enaka 0.2 ali 0.4.

Ob reševanju lahko uporabite priloženo tabelo za binomsko porazdelitev.

4. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $X_1, X_2, \dots, X_n \sim X$ slučajni vzorec, porazdeljen geometrijsko z vrednostmi $1, 2, \dots$ z neznanim parametrom $p \in (0, 1)$, t.j. $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$ za $k \in \mathbb{N}$. Znano je, da je cenilka največjega verjetja za p enaka $\frac{1}{\bar{X}}$, kjer je \bar{X} vzorčno povprečje. Izpeljite približni interval zaupanja za p za velike velikosti vzorca, kjer v izpeljavi uporabite aproksimacijo z normalno porazdelitvijo. Uporabite lahko dejstvo, da je $E(X) = \frac{1}{p}$ in $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Tabela za binomsko porazdelitev

V vsakem stolpcu obeh tabel so podane vrednosti porazdelitvene funkcije $F(k) = P(X \leq k)$ za k med 0 in n , kjer je X porazdeljena binomsko s parametroma n in p , ki je napisan na vrhu stolpca. V prvi tabeli je n enak 8, v drugi pa 16.

Tabela 1: $n = 8$.

$k \backslash p$	0.2	0.25	0.4
0	0.1678	0.1001	0.0168
1	0.5033	0.3671	0.1064
2	0.7969	0.6785	0.3154
3	0.9437	0.8862	0.5941
4	0.9896	0.9727	0.8263
5	0.9988	0.9958	0.9502
6	0.9999	0.9996	0.9915
7	1.0000	1.0000	0.9993
8	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 2: $n = 16$.

$k \backslash p$	0.2	0.25	0.4
0	0.0281	0.0100	0.0003
1	0.1407	0.0635	0.0033
2	0.3518	0.1971	0.0183
3	0.5981	0.4050	0.0651
4	0.7982	0.6302	0.1666
5	0.9183	0.8103	0.3288
6	0.9733	0.9204	0.5272
7	0.9930	0.9729	0.7161
8	0.9985	0.9925	0.8577
9	0.9998	0.9984	0.9417
10	1.0000	0.9997	0.9809
11	1.0000	1.0000	0.9951
12	1.0000	1.0000	0.9991
13	1.0000	1.0000	0.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000
16	1.0000	1.0000	1.0000