Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

STATISTIKA 1

1. kolokvij

10. december 2009

Ime in priimek: ____________________________ Vpisna številka: ____________________

Preden se lotite reševanja, pazljivo preberite besedilo naloge in vse odgovore dobro utemeljite. Naloge rešujte samostojno!
Veljale bodo samo rešitve na listu z nalogami oz. na priloženem listu z mojim podpisom.
Za pomoč je dovoljeno imeti eno stran formata A4, na kateri pa naj bodo zapisane le teoretične osnove in NE rešene naloge. Med kolokvijem ni dovoljena uporaba mobitela in ostalih tehničnih pripomočkov.
Ob morebitnem kršenju pravil vaš kolokvij ne bo ocenjen!
Na voljo imate 90 minut.
Veliko uspeha!

Naloga	Odstotki
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj odstotkov	

1. naloga [30 točk]
Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra podmnožic množice Ω in N dana podmnožica v Ω.

(a) Pokažite, da je $\mathcal{M} = \{(A \cap N) \cup (B \backslash N); A, B \in \mathcal{F}\}$ σ-algebra.

(b) Pokažite, da je $\mathcal{M}$ v resnici σ-algebra, generirana z $\mathcal{F} \cup \{N\}$.

2. naloga [30 točk]
Naj bo slučajna spremenljivka $X \in L^1$ ter naj bodo A in A_n, za vsak $n \in \mathbb{N}$, dogodki.

(a) Pokažite, da velja
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{|X|>n\}} X dP = 0.$$

(b) Če je $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$, je tudi $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} X dP = 0$. Dokažite!

(c) Dokažite, da velja $\int_A |X| dP = 0$ natanko tedaj, ko je $P(A \cap \{|X| > 0\}) = 0$.

(d) Dokažite, da za slučajno spremenljivko $X \in L^2$ velja:
$$D(X) = 0 \Rightarrow P(X = E(X)) = 1.$$

3. naloga [20 točk]
Naj bo $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z matematičnim upanjem $E(X_1) = \mu$ in disperzijo $D(X_1) = \sigma^2$. Dokažite, da tedaj povprečna vrednost $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ konvergira v prostoru $L^2(P)$ proti μ z naraščajočim n.

4. naloga [20 točk]
Z uporabo Fubinijevega izreka dokažite, da za porazdelitveno funkcijo F poljubne slučajne spremenljivke X velja

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x+a) - F(x))dx = a,$$

kjer dx označuje integriranje po Lebesgueovi meri.