Ime in priimek:____________________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2010/2011

1. kolokvij

2. december 2010

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 14 točk. Veliko uspeha!

1. Izračunaj limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{nx+1}{nx+n+1}\operatorname{arctg}(nx)\,dx.$$

2. Naj bo
$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0\,, y\geq 0\,, x^2+y^2\leq 1\},\\ L &= \{(x,y)\in\Omega \mid x^2+y^2=1\},\\ N &= \{(x,y)\in\Omega \mid x+y\leq 1\}.\end{aligned}$$
Naj bo $\mathscr{M}$ najmanjša σ-algebra na Ω, ki vsebuje vse pravokotnike $M_a=[0,a]\times[0,\sqrt{1-a^2}]$, kjer je $a\in(0,1)$. Definirajmo $\mathscr{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ s predpisom
$$\begin{aligned}\mathscr{F}=\{A\subseteq\Omega \mid\ &\text{bodisi } A\cap L \text{ največ števna in } (0,1)\notin A\\ &\text{bodisi } A^c\cap L \text{ največ števna in } (0,1)\in A\}.\end{aligned}$$
Dokaži:
   (a) $\mathscr{F}$ je σ-algebra,
   (b) $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{F}$,
   (c) $N\notin\mathscr{M}$.

3. Naj bo m Lebesgueova mera na intervalu $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Za vsak $n\geq 2$ naj bo
$$f_n(x)=\chi_{\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]}(x),$$
kjer je $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Ali zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k 0 verjetnostno? Ali $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k 0 skoraj gotovo? Ali zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k 0 v prostoru $\mathrm{L}^p(m)$ za kakšen $p\in(0,\infty)$? Če da, za katere p?

4. Naj bo $\Omega=[0,1]$, m Lebesgueova mera na $[0,1]$ in $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq[0,1]$ zaporedje realnih števil. Dokaži, da je
$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$
natanko tedaj, ko obstaja zaporedje Borelovih množic $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n\subseteq[0,1]$ za vsak $n\in\mathbb{N}$, za katero je $m(A_n)=a_n$ za vsak $n\in\mathbb{N}$ in velja
$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}<\infty\quad\text{skoraj gotovo.}$$