Ime in priimek:______________________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2011/2012

1. kolokvij

20. december 2011

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 14 točk. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{(n+x)\sin\frac{x}{n}}{x^3+x}\,dx.$$

2. Naj bo $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ prostor z mero, $n\in\mathbb{N}$ in $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ merljiva funkcija. Za vsak $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ definiramo
$$\lambda(B)=\mu(f^{-1}(B)).$$
Dokažite, da je λ mera na prostoru $(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$. Utemeljite tudi, zakaj potrebujemo predpostavko o merljivosti funkcije f. Ali je mera λ verjetnostna, če je μ verjetnostna mera?

3. Naj bo m Lebesguova mera na intervalu $[0,1]$. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo
$$f_n(x)=2^n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x),$$
kjer je $x\in[0,1]$. Po definiciji dokažite, da zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira verjetnostno proti 0. Ali $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj gotovo proti 0? Ali zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 v prostoru $\mathrm{L}^p(m)$ za kakšen $p\in(0,\infty)$? Če da, za katere p?

4. Naj bo $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ prostor s polno mero in $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ merljiva funkcija. Naj bo funkcija $g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ skoraj povsod enaka f. Dokažite, da je potem g merljiva funkcija.