Ime in priimek:______________________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2012/2013

1. kolokvij

14. december 2012

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 14 točk. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{n+1}{n}}^{\infty}\frac{n^2x+\sqrt{n}^3x-1}{n^2x^3+n\sqrt{x}+n^2x}\operatorname{arctg}\left(\frac{n-3x}{n}\right)dx.$$

2. Naj bo $(\Omega,\mathscr{F})$ merljiv prostor in $f\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ funkcija. Naj bo

$$\mathscr{M}=\{A\subseteq\Omega\,|\,\text{obstaja tak } E\in\mathscr{B}(\mathbb{R}),\text{ da je } A=f^{-1}(E)\}=\{f^{-1}(E)\,|\,E\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

   (a) Dokažite, da je $\mathscr{M}$ σ-algebra na množici Ω.
   (b) Dokažite, da je funkcija f merljiva glede na σ-algebro $\mathscr{F}$ natanko tedaj, ko je $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{F}$.

3. Naj bo δ_{x_0} Diracova mera na merljivem prostoru $(\mathbb{R},\mathscr{P}(\mathbb{R}))$, kjer je $x_0=-1$. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo

$$f_n(x)=e^{nx},\quad x\in\mathbb{R}.$$

   (a) Ali konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj gotovo proti 0?
   (b) Ali $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 v prostoru $\mathrm{L}^p(\delta_{x_0})$ za kakšen $p\in(0,\infty)$? Če da, za katere p?
   (c) Naj bo sedaj $x_0=0$. Kam konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj gotovo v tem primeru? Skoraj gotovo konvergenco k primerni funkciji tudi dokažite.

   Na vajah smo izpeljali naslednje. Na prostoru $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\delta_{x_0})$ velja $\int f\,d\delta_{x_0}=f(x_0)$ za vsako funkcijo $f\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$.

4. Naj bo $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ prostor z mero in $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ enostavna nenegativna merljiva funkcija. Funkcija f je torej oblike

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_j\chi_{A_j},$$

   kjer so $A_1,A_2,\ldots,A_n$ neke paroma disjunktne merljive množice in $c_1,c_2,\ldots,c_n$ neka nenegativna realna števila ter $n\in\mathbb{N}$. Za poljubno množico $E\in\mathscr{F}$ naj bo

$$\lambda(E)=\int_E f\,d\mu.$$

   Dokažite, da je λ mera na prostoru $(\Omega,\mathscr{F})$.
   Pozor: za integral vemo le, da je končno aditiven in ne tudi števno aditiven.
   Opomba: v primeru težav lahko poiskusite dokazati trditev najprej v posebnem primeru, ko je $f=\chi_A$ za neko merljivo množico A.