Ime in priimek: ____________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Predavalnica: ________ Vrsta: ________ Sedež: ________

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)
Statistika I, 1. del 2013/2014
1. kolokvij
6. december 2013

Naloge rešujte samostojno. Dovoljeni pripomoček je en A4 list z definicijami ter izreki s predavanj in vaj, na katerem ne smejo biti napisane rešene naloge in dokazi. H kolokviju je priložen list "Osnove teorije mere" in dodatni prazni list. Na vse dobljene liste se morate ob začetku reševanja podpisati in jih ob zaključku oddati. Če ne želite, da vam del vsebine dodatnega lista ocenim, to napišite na list. Čas reševanja kolokvija je 90 minut z možnostjo podaljšanja.
Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 14 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1-n}{n}}^{n}\frac{e^{-\frac{x}{n}}+n^2\operatorname{arctg}(nx)}{n^2x^2+nx^2+n^2}\,dx.$$

2. Na merljivem prostoru $\big([0,1],\mathscr{B}([0,1])\big)$ definiramo verjetnostno mero P s predpisom

$$P(A)=\frac{1}{2}m(A)+\frac{1}{2}\delta_{x_0}(A),\quad A\in\mathscr{B}([0,1]),$$

kjer je m Lebesguova mera in δ_{x_0} Diracova mera pri $x_0=0$. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo $f_n(x)=n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$, $x\in[0,1]$.
   (a) Ali konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj gotovo proti 0?
   (b) Ali $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 v prostoru $L^p(P)$ za kakšen $p\in(0,\infty)$? Če da, za katere p?
   (c) Ali obstaja taka funkcija $f\colon[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, da konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ k f skoraj gotovo?
   Opomba: ni potrebno dokazati, da je P res verjetnostna mera.

3. Naj bo Ω neprazna neštevna množica in $\mathscr{A}=\{A\subseteq\Omega\mid A \text{ končna}\}$.
   (a) Naj bo σ-algebra $\mathscr{F}=\{A\subseteq\Omega\mid A \text{ števna ali } A^c \text{ števna}\}$. Dokažite, da je $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{F}$.
   (b) Naj bo $\mathscr{M}=\{A\subseteq\Omega\mid A \text{ števna}\}$. Dokažite, da je $\operatorname{mr}(\mathscr{A})=\mathscr{M}$. (Z mr(A) je označen najmanjši monotoni razred, ki vsebuje $\mathscr{A}$.)

4. Naj bo $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ prostor s končno mero in $g\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ merljiva funkcija. Na $\big(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R})\big)$ definiramo mero λ s predpisom $\lambda(B)=\mu\big(g^{-1}(B)\big)$, $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
   (a) Naj bo $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Dokažite, da je $\int\chi_B\,d\lambda=\int(\chi_B\circ g)\,d\mu$.
   (b) Predpostavite, da je $\int h\,d\lambda=\int(h\circ g)\,d\mu$ za poljubno omejeno merljivo funkcijo $h\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Naj bo $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ nenegativna merljiva funkcija. Dokažite, da je $\int f\,d\lambda=\int(f\circ g)\,d\mu$.