Ime in priimek:______________________ Vpisna številka: [ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ]

Predavalnica: ________ Vrsta: ________ Sedež: ________

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)
Statistika I, 1. del 2013/2014
1. kolokvij
6. december 2013

Rešitve
in točkovnik

Naloge rešujte samostojno. Dovoljeni pripomoček je en A4 list z definicijami ter izreki s predavanj in vaj, na katerem ne smejo biti napisane rešene naloge in dokazi. H kolokviju je priložen list "Osnove teorije mere" in dodatni prazni list. Na vse dobljene liste se morate ob začetku reševanja podpisati in jih ob zaključku oddati. Če ne želite, da vam del vsebine dodatnega lista ocenim, to napišite na list. Čas reševanja kolokvija je 90 minut z možnostjo podaljšanja.

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 14 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Izračunajte limito

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1-n}{n}}^{n}\frac{e^{-\frac{x}{n}}+n^2\operatorname{arctg}(nx)}{n^2x^2+nx^2+n^2}\,dx.$$

$X=[-1,\infty)$

$$f_n(x)=\frac{\overset{\geq 0}{e^{-\frac{x}{n}}}+n^2\operatorname{arctg}(nx)}{\underbrace{n^2x^2+nx^2+n^2}_{>0}}\chi_{[\frac{1-n}{n},n]}(x)$$

$$\bullet\ |f_n(x)|\leq\frac{\overset{\leq e}{e^{-x/n}}+n^2\overset{\leq\pi/2}{|\operatorname{arctg}(nx)|}}{n^2x^2+nx^2+n^2}\chi_{[\frac{1-n}{n},n]}(x)\leq\frac{e+n^2\frac{\pi}{2}}{n^2x^2+nx^2+n^2}\chi_{[\frac{1-n}{n},n]}(x)=$$

trikotniška neenakost v števcu

$$=\frac{\overset{\leq 1}{\frac{1}{n^2}}e+\frac{\pi}{2}}{x^2+\underset{\geq 0}{\frac{1}{n}}x^2+1}\underset{\leq 1}{\chi_{[\frac{1-n}{n},n]}(x)}\leq\frac{e+\frac{\pi}{2}}{x^2+1}=:g(x)$$

$$\bullet\ \int_{-1}^{\infty}g(x)\,dx=\left(e+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{\infty}=\left(e+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{3\pi}{4}\left(e+\frac{\pi}{2}\right)<\infty\Rightarrow g\in L^1$$

$\Rightarrow$ Lahko torej uporabimo izrek o dominantni konvergenci.

8 tč.

$$\bullet\ \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1-n}{n}}^{n}\frac{e^{-\frac{x}{n}}+n^2\operatorname{arctg}(nx)}{n^2x^2+nx^2+n^2}\,dx=\int_{-1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}\overset{\to 1}{e^{-x/n}}+\operatorname{arctg}(nx)}{x^2+\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}x^2+1}\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{\infty}\frac{\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}(nx)}{x^2+1}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{-\frac{\pi}{2}}{x^2+1}\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{+\frac{\pi}{2}}{x^2+1}\,dx=-\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{0}+\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{\infty}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}(nx)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}; & x<0\\ 0; & x=0\\ \frac{\pi}{2}; & x>0\end{cases}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left(0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{4}=\underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$$

6 tč.

2. Na merljivem prostoru $([0,1],\mathscr{B}([0,1]))$ definiramo verjetnostno mero P s predpisom

$$P(A)=\frac{1}{2}m(A)+\frac{1}{2}\delta_{x_0}(A),\quad A\in\mathscr{B}([0,1]),$$

kjer je m Lebesguova mera in δ_{x_0} Diracova mera pri $x_0=0$. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo $f_n(x)=n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$, $x\in[0,1]$.

5 (a) Ali konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj gotovo proti 0?

6 (b) Ali $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 v prostoru $L^p(P)$ za kakšen $p\in(0,\infty)$? Če da, za katere p?

3 (c) Ali obstaja taka funkcija $f\colon[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, da konvergira zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ k f skoraj gotovo?

Opomba: ni potrebno dokazati, da je P res verjetnostna mera.

(a) • Naj bo $x\in(0,1]$.

$\Rightarrow \exists n_0 : \frac{1}{n_0}<x$

$\Rightarrow \forall n\geq n_0: \frac{1}{n}<x \Rightarrow \forall n\geq n_0: \chi_{[0,1/n]}(x)=0 \Rightarrow \forall n\geq n_0: f_n(x)=0$

Torej: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$.

• $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) \underset{0\in[0,1/n]\ \forall n}{=} \lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$

$\Rightarrow \{x\in[0,1];\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0\}=(0,1]$

$P(\lim\limits_{n\to\infty} f_n=0)=P((0,1])=\frac{1}{2}\underbrace{m((0,1])}_{1}+\frac{1}{2}\underbrace{\delta_{x_0}((0,1])}_{0}=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ NE konvergira s.g. proti 0

$0\notin(0,1]$

(b) $\int|f_n-0|^p\,dP=\int(n\chi_{[0,1/n]})^p\,dP=\int n^p\chi_{[0,1/n]}\,dP \overset{\text{def. integrala}}{=} n^p P([0,1/n])=$

$=n^p\left(\frac{1}{2}\underbrace{m([0,1/n])}_{1/n}+\frac{1}{2}\underbrace{\delta_{x_0}([0,1/n])}_{1}\right)=\frac{1}{2}n^{p-1}+\frac{1}{2}n^p \xrightarrow{n\to\infty}\infty$ za poljuben $p>0$

konvergira, proti 0 ($p<1$) ali 1 ($p=1$) ali ∞ ($p>1$)

$n^p \xrightarrow{p>0} \infty$

$\Rightarrow \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ NE konvergira v $L^p(P)$ za noben $p>0$.

(c) Naj bo $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ poljubna funkcija.

I. način

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=\infty\neq f(0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)\neq f(0) \Rightarrow 0\in\{x\in[0,1];\ f_n(x)\not\to f(x)\}$

$P(f_n\not\to f)\geq P(\{0\})=\frac{1}{2}\underbrace{m(\{0\})}_{0}+\frac{1}{2}\underbrace{\delta_{x_0}(\{0\})}_{1}=\frac{1}{2}$

$P(f_n\not\to f)>0 \Rightarrow \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ NE konvergira skoraj gotovo proti f

Taka funkcija f torej ne obstaja.

II. način

Denimo, da velja $f_n\xrightarrow{s.g.}f$. Torej je $P(f_n\xrightarrow{n\to\infty}f)=\frac{1}{2}\underbrace{m(f_n\xrightarrow{n\to\infty}f)}_{0}+\frac{1}{2}\delta_{x_0}(f_n\xrightarrow{n\to\infty}f)=1$

in zato $\delta_{x_0}(f_n\xrightarrow{n\to\infty}f)=1$.

$\Rightarrow x_0=0\in\{f_n\xrightarrow{n\to\infty}f\}\Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)}_{\infty}=f(0)$ ✗ saj f slika v $\mathbb{R}$

Torej ne obstaja f, da $f_n\xrightarrow{s.g.}f$.

3. Naj bo Ω neprazna neštevna množica in $\mathscr{A} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ končna}\}$.

6 (a) Naj bo σ-algebra $\mathscr{F} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ števna ali } A^c \text{ števna}\}$. Dokažite, da je $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{F}$.

8 (b) Naj bo $\mathscr{M} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ števna}\}$. Dokažite, da je $\mathrm{mr}(\mathscr{A}) = \mathscr{M}$. (Z mr(A) je označen najmanjši monotoni razred, ki vsebuje $\mathscr{A}$.)

(a) $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$

(i) $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}$

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$

  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A$ končna $\Rightarrow A$ števna $\Rightarrow A \in \mathcal{F}$ ✓

- Ker je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, je $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}) \underset{\mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra}}{=} \mathcal{F}$. ✓

(ii) $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$

Naj bo $A \in \mathcal{F}$ poljubna. Želimo dokazati, da je $A \in \sigma(\mathcal{A})$.

A števna ali A^c števna

① Naj bo A števna.

$A = \underbrace{\bigcup_{a \in A} \{a\}}_{\text{števna unija}}$ in $\{a\} \in \mathcal{A}, \forall a \in A$ (ker je končna) $\Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{A})$ ✓

zaprtost σ-algebre za števne unije

② Naj bo A^c števna.

$A^c = \underbrace{\bigcup_{a \in A^c} \{a\}}_{\text{števna unija}}$ in $\{a\} \in \mathcal{A}, \forall a \in A^c \Rightarrow A^c \in \sigma(\mathcal{A}) \Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{A})$ ✓

zaprtost σ-algebre za komplementiranje

(b) $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$

(*) Najprej moramo dokazati, da je $\mathcal{M}$ res monotoni razred.

① $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ iz $\mathcal{M} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: A_n$ števna $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ števna $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ ✓

števna unija

② $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ iz $\mathcal{M} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: A_n$ števna $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ($\subseteq A_1$ števna) števen $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ ✓

(i) $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$

  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A$ končna $\Rightarrow A$ števna $\Rightarrow A \in \mathcal{M}$ ✓

- Ker je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, je $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{mr}(\mathcal{M}) \underset{\mathcal{M} \text{ je monotoni razred}}{=} \mathcal{M}$ ✓

(ii) $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{mr}(\mathcal{A})$

Naj bo $A \in \mathcal{M}$ poljubna. Če je A končna, je $A \in \mathcal{A}$ in zato $A \in \mathrm{mr}(\mathcal{A})$.
Naj bo sedaj A števno neskončna. Torej lahko njene elemente razvrstimo v zaporedje: $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Zapišemo lahko $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_1, \dots, a_n\}$.

$\left.\begin{array}{l} \forall n: \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{A}, \text{ ker končna} \\ \forall n: \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \in \mathrm{mr}(\mathcal{A})$ zaradi zaprtosti za unije naraščajočih zaporedij ✓

4. Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor s končno mero in $g\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ merljiva funkcija. Na $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ definiramo mero λ s predpisom $\lambda(B) = \mu(g^{-1}(B))$, $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

6 (a) Naj bo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Dokažite, da je $\int \chi_B \, d\lambda = \int (\chi_B \circ g) \, d\mu$.

8 (b) Predpostavite, da je $\int h \, d\lambda = \int (h \circ g) \, d\mu$ za poljubno omejeno merljivo funkcijo $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nenegativna merljiva funkcija. Dokažite, da je $\int f \, d\lambda = \int (f \circ g) \, d\mu$.

(a) $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\int \chi_B \, d\lambda = \int (\chi_B \circ g) \, d\mu$

$$\int \chi_B \, d\lambda = \lambda(B) = \mu(g^{-1}(B)) = \int \chi_{g^{-1}(B)} \, d\mu \overset{(*)}{=} \int (\chi_B \circ g) \, d\mu \checkmark$$

$$(*) \quad \chi_{g^{-1}(B)}(\omega) = \begin{cases} 1 \; ; & \omega \in g^{-1}(B) \iff g(\omega) \in B \\ 0 \; ; & \omega \notin g^{-1}(B) \iff g(\omega) \notin B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \chi_{g^{-1}(B)}(\omega) = \chi_B(g(\omega)) = (\chi_B \circ g)(\omega), \; \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \chi_{g^{-1}(B)} = \chi_B \circ g$$

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merljiva, $f \geq 0$

$\int f \, d\lambda = \int (f \circ g) \, d\mu$

$f_n := \min\{f, n\}, \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n \uparrow f$ (po točkah)

Za vse n velja: f_n merljiva omejena, $f_n \geq 0$, $f_n \leq f_{n+1}$ (po točkah).

$$\int f \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int (f_n \circ g) \, d\mu \overset{(**)}{=} \int \lim_{n \to \infty} (f_n \circ g) \, d\mu = \int (f \circ g) \, d\mu \checkmark$$

def. integrala omejenih merljivih funkcij

uporabimo predpostavko na vsakem členu

$\lim_{n \to \infty} (f_n \circ g)(\omega) = \lim_{n \to \infty} f_n(g(\omega)) = f(g(\omega)) = (f \circ g)(\omega), \forall \omega \in \Omega$

(**) • f_n, g merljivi $\Rightarrow f_n \circ g$ merljiva

• $(f_n \circ g)(\omega) = f_n(g(\omega)) \geq 0, \forall \omega$

• $(f_n \circ g)(\omega) = f_n(g(\omega)) \leq f_{n+1}(g(\omega)) = (f_{n+1} \circ g)(\omega), \forall \omega$

$\Rightarrow$ Zaporedje funkcij $\{f_n \circ g\}_{n=1}^{\infty}$ izpolnjuje predpostavke izreka o monotoni konvergenci.