STATISTIKA 1

2. kolokvij

7. januar 2010

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna številka: ____________________

Naloga	Odstotki
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj odstotkov	

---

1. naloga [20 točk]
Naj bodo slučajne spremenljivke X_n neodvisne in naj bo njihova porazdelitev dana z naslednjo verjetnostno shemo

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{1}{2n\log n} & 1-\frac{1}{n\log n} & \frac{1}{2n\log n} \end{pmatrix}$$

za vsak $n \geq 2$. Ali vrsta $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} X_k$ konvergira verjetnostno z rastočim n? Če da, h kateri slučajni spremenljivki.

2. naloga [40 točk]
Za funkcije v točkah (a), (b) in (c) ugotovite, ali so karakteristične funkcije. Če je odgovor da, opišite porazdelitev pripadajoče slučajne spremenljivke.

(a) $\frac{1+\cos t+2\cos 2t}{4}$

(b) $(\cos t)^{17}$

(c) e^{-3t^4}

(d) Dokažite, da ima slučajna spremenljivka, katere karakteristična funkcija je realna ($f_X(t) \in \mathbb{R} \quad \text{za} \quad \forall t \in \mathbb{R}$), matematično upanje nič.

3. naloga [30 točk]
Naj bodo slučajne spremenljivke X_n neodvisne in naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $X_n \sim Pois(n)$. Naj bo slučajna spremenljivka Y_n definirana s predpisom $Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$.

(a) Izpeljite karakteristično funkcijo za slučajno spremenljivko X_n ter z njeno pomočjo poiščite karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke Y_n.

(b) Ali karakteristične funkcije slučajnih spremenljivk Y_n konvergirajo z rastočim n proti kateri izmed znanih karakterističnih funkcij? Če da, opredelite, za karakteristično funkcijo katere porazdelitve gre ter katero konvergenco nam to dejstvo zagotavlja?

(c) Ali rezultat iz prejšnje točke sledi direktno iz katerega izmed znanih izrekov? Utemeljite.

4. naloga [30 točk]
Naj bosta X in Y neodvisni in enako porazdeljeni slučajni spremenljivki z matematičnim upanjem 0 in disperzijo $\frac{1}{2}$. Naj bosta tudi slučajni spremenljivki $X + Y$ in $X - Y$ neodvisni in enako porazdeljeni.

(a) Označite z f karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke X (in tudi Y) ter pokažite, da zanjo velja $f(2t) = f(t)^3 f(-t)$.

(b) Definirajte novo funkcijo $g(t) = f(t)f(-t)$ in s pomočjo rezultata iz prejšnje točke dokažite, da velja $g(t) = g(\frac{t}{2^n})^{4^n}$. Ali je funkcija g karakteristična funkcija? Če da, katere slučajne spremenljivke?

(c) Določite eksplicitni zapis funkcije $g(t)$.
Namig: pomagate si lahko c CLI ali razvojem v Taylorjevo vrsto.
Določite še porazdelitve slučajnih spremenljivk $X - Y$, $X + Y$ in X.