Ime in priimek:____________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2010/2011

2. kolokvij

28. januar 2011

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 14 točk. Veliko uspeha!

1. S pomočjo dvojnega integrala funkcije
$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2y^2}$$
po primerno izbranem območju izračunajte integral
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(2x) - \operatorname{arctg}(x)}{x}\, dx.$$

2. Ali sta funkciji $f(t) = (\cos(t))^2 + \frac{3}{4}(\sin(t))^2$ in $g(t) = 1 + t$ karakteristični funkciji kakšne slučajne spremenljivke? Če je odgovor da, opišite kako je porazdeljena pripadajoča slučajna spremenljivka. Če je odgovor ne, utemeljite zakaj ni.

3. Naj bo slučajna spremenljivka X enakomerno porazdeljena na intervalu $[0,1]$. Zapišemo jo v decimalni obliki kot $X = 0,\overline{X_1X_2X_3\ldots}$. Dokažite, da velja
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.g.}} c,$$
kjer je c neka konstanta, in določite c. Ali velja tudi
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\cdot a}{\sqrt{n\cdot b}} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} Z \sim \ \mathrm{N}(0,1)$$
za primerno izbrani konstanti a in b? Če da, kaj sta a in b?

4. Naj bodo $Z_1, Z_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene Bernoullijevo s parametrom $p \in (0,1)$, t.j.
$$Z_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \quad \text{za vsak } i = 1,2,\ldots, (q = 1-p).$$
Naj bo $S_n = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ in
$$X_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2S_n - n}$$
za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokažite, da je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ martingal glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (t.j. za vsak $n\in\mathbb{N}$ je X_n $\mathscr{F}_n$-merljiva, $E(|X_n|) < \infty$ in velja $E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n$).