

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
 Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)
Statistika I, 1. del 2011/2012
2. kolokvij
 13. januar 2012

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 14 točk. Veliko uspeha!

1. S pomočjo dvojnega integrala funkcije

$$f(x, y) = ye^{xy}$$

po primerno izbranem območju izračunajte integral

$$\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x^2} e^x + \frac{x+1}{x^2} e^{-x} \right) dx.$$

2. (a) Dokažite, da je funkcija $\varphi(t) = \frac{1+\cos(3t)-\sin^2(t)}{2}$ karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke in določite porazdelitev te slučajne spremenljivke.
 (b) Naj bo X slučajna spremenljivka z zgornjo karakteristično funkcijo φ . Slučajna spremenljivka Y naj bo neodvisna od X in podana z verjetnostno shemo

$$Y \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Izračunajte karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $3Y - X$.

- (c) Izračunajte karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke, ki je porazdeljena geometrijsko s parametrom $p \in (0, 1]$.

3. Naj bodo slučajne spremenljivke $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ in $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ v celoti neodvisne. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ je X_k porazdeljena enakomerno zvezno na intervalu $\left[-\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right]$ in Y_k enakomerno diskretno na množici $\left\{-\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ označimo $Z_k = X_k + Y_k$ in $S_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$. Ali velja

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} c$$

za primerno izbrano konstanto c ? Če je odgovor da, koliko je c ?

4. Naj bo $p \in [0, 1]$ in $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ zaporedje slučajnih spremenljivk, kjer je X_n porazdeljena binomsko s parametroma n in p .
 (a) Dokažite, da je karakteristična funkcija slučajne spremenljivke X_n enaka $\varphi_{X_n}(t) = (1 - p + pe^{it})^n$.
 (b) Ali zaporedje slučajnih spremenljivk $\left\{\frac{X_n}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ konvergira šibko? Če je odgovor da, kako je porazdeljena limitna slučajna spremenljivka?