Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2012/2013

2. kolokvij

18. januar 2013

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 14 točk. Veliko uspeha!

1. S pomočjo dvojnega integrala funkcije
$$f(x,y) = y\cos(xy)$$
po primerno izbranem območju izračunajte integral
$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)+\cos(x)-1}{x^2}\,dx.$$

2. Zvezna slučajna spremenljivka je porazdeljena Cauchyjevo s parametroma $x_0 \in \mathbb{R}$ in $\gamma > 0$, označimo Cauchy(x_0,γ), če je njena gostota enaka
$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left(1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)}, \quad x\in\mathbb{R}.$$
Standardna Cauchyjeva porazdelitev je Cauchy(0,1). Če je slučajna spremenljivka X porazdeljena Cauchy(x_0,γ), potem je $\frac{X-x_0}{\gamma}$ porazdeljena standardno Cauchyjevo.
(a) Izračunaj karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke, ki je porazdeljena Cauchy(x_0,γ) za poljubna $x_0\in\mathbb{R}$ in $\gamma > 0$.
(b) Naj bodo slučajne spremenljivke $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ neodvisne, vse porazdeljene standardno Cauchyjevo. Dokažite, da je za vsak $n\in\mathbb{N}$ tudi slučajna spremenljivka
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$
porazdeljena standardno Cauchyjevo. Ali to nasprotuje krepkemu zakonu velikih števil? Odgovor utemeljite.
Na vajah smo dokazali, da je karakteristična funkcija standardne Cauchyjeve porazdelitve enaka $e^{-|t|}$, $t\in\mathbb{R}$.

3. Naj bodo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zvezne slučajne spremenljivke in α neko pozitivno realno število. Za vsak $n\in\mathbb{N}$ je gostota X_n podana s predpisom
$$f_n(x) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{n}{x}\right)^{n\alpha+1} & \text{za } x > n, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$
Za vsak $n\in\mathbb{N}$ naj bo $Y_n = \ln\frac{X_n}{n}$. Dokažite, da zaporedje slučajnih spremenljivk $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po zakonu k neki slučajni spremenljivki Y. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka Y?

4. Naj bodo $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ neodvisne identično porazdeljene slučajne spremenljivke iz L^4 z ničelnim matematičnim upanjem in disperzijo σ^2. Ali velja
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i+X_{i+1})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$$
za primerno izbrano konstanto c? Če je odgovor da, koliko je c?