Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: | | | | | | | | |

Predavalnica: ________ Vrsta: ________ Sedež: ________

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)

Statistika I, 1. del 2013/2014

2. kolokvij

21. januar 2013

Naloge rešujte samostojno. Dovoljena pripomočka sta le dva A4 lista z definicijami ter izreki s predavanj in vaj, na katerih ne smejo biti napisane rešene naloge in dokazi. H kolokviju je priložen list "Osnove teorije množic" in dodatni prazni list. Na vse dobljene liste se morate ob začetku reševanja podpisati in jih ob zaključku oddati. Če ne želite, da vam del vsebine dodatnega lista ocenim, to napišite na list. Čas reševanja kolokvija je 90 minut z možnostjo podaljšanja.

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 14 točk, 50 točk šteje za 100%. Veliko uspeha!

1. Naj bo a poljubna pozitivna konstanta. S pomočjo dvojnega integrala funkcije
$$f(x,y) = y\sin(xy)$$
po primerno izbranem območju izračunajte integral
$$\int_0^1 \frac{\sin(ax) - ax\cos(ax)}{ax^2}\,dx.$$

2. Naj bo $a > 0$. Denimo, da imamo na voljo števno neskončno kovancev, ki so označeni z $1, 2, \ldots$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da je verjetnost meta grba z n-tim kovancem enaka $\frac{1}{n^a}$. Neodvisno vržemo vsak kovanec enkrat.
   - Za katere vrednosti parametra a velja, da pade neskončno mnogo grbov skoraj gotovo in neskončno mnogo cifer skoraj gotovo?
   - Za katere vrednosti parametra a velja, da pade končno mnogo grbov skoraj gotovo in neskončno mnogo cifer skoraj gotovo?

3. Naj bodo slučajne spremenljivke $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ porazdeljene enakomerno zvezno na intervalu $[0,1]$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $Y_n = \left(1 + \frac{X_n}{n}\right)^n$. Naj bo tudi slučajna spremenljivka X porazdeljena enakomerno zvezno na intervalu $[0,1]$ in naj bo $Y = e^X$. Dokažite, da zaporedje slučajnih spremenljivk $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po zakonu k slučajni spremenljivki Y.
Dejstvo iz analize: zaporedje $\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\}_{n=1}^\infty$ *je naraščajoče.*

4. Naj bodo $\{Z_k\}_{k=1}^\infty$ slučajne spremenljivke z vrednostmi na intervalu $[0,a]$, kjer je a neka pozitivna konstanta. Naj bo $\lambda > 0$ in $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ zaporedje strogo pozitivnih realnih števil. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $S_n = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ in
$$X_n = c_n e^{\lambda S_n}.$$
   - Določite neko tako zaporedje $\{c_n\}_{n=1}^\infty$, da bo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podmartingal glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Določite neko tako zaporedje $\{c_n\}_{n=1}^\infty$, da bo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nadmartingal glede na $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.