

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Finančna matematika, 1. stopnja (3. letnik)
Statistika I, 2. del 2010/2011
3. kolokvij
8. april 2011

Pazljivo preberite navodilo naloge, preden se lotite reševanja. Odgovore dobro utemeljite. Vsaka naloga je vredna 25%. Veliko uspeha!

1. Naj bo X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 slučajni vzorec porojen iz eksponentne porazdelitve s parametrom ena in naj bodo Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 pripadajoče vrstilne statistike. Dokažite, da sta slučajni spremenljivki $Z_1 = Y_2$ in $Z_2 = Y_4 - Y_2$ neodvisni.

Namig: najprej poišči skupno porazdelitev slučajnega vektorja (Y_2, Y_4) .

2. V neki državi s tremi milijoni prebivalcev imajo čez en mesec predsedniške volitve, na katerih kandidirajo štiri kandidati. Prva javnomnenjska raziskava izpred enega meseca je pokazala, da 380 izmed 1000 vprašanih podpira kandidata A in 300 kandidata B. Druga raziskava, ki so jo izvedli danes, pa je pokazala, da 420 izmed 1000 vprašanih podpira kandidata A in 280 kandidata B.

- (a) Z izračunom primernega približnega enostranskega intervala zaupanja utemelji, ali lahko na podlagi zgornjih raziskav s 95% gotovostjo trdimo, da se je podpora kandidatu A v zadnjem mesecu zvišala?
- (b) Z uporabo primernega približnega dvostranskega intervala zaupanja utemelji, ali lahko na podlagi prve raziskave s 95% gotovostjo sklepamo, da je imel pred enim mesecem kandidat A večjo podporo kot kandidat C, za katerega žal nimamo rezultatov.

3. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in X_1, X_2, \dots, X_n slučajni vzorec z gostoto

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{za } x \geq \theta, \\ 0 & \text{za } x < \theta. \end{cases}$$

Izračunaj momentno cenilko $\hat{\theta}$ za neznan parameter $\theta \in \mathbb{R}$. Ali je $\hat{\theta}$ nepristranska cenilka za θ ? Izračunaj standardno napako cenilke $\hat{\theta}$.

4. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in X_1, X_2, \dots, X_n slučajni vzorec porojen iz eksponentne porazdelitve s parametrom λ , kjer je $\lambda > 0$. Znano je, da je $\frac{1}{\bar{X}}$ momentna cenilka za λ , kjer \bar{X} označuje vzorčno povprečje podanega slučajnega vzorca. S pomočjo centralnega limitnega izreka izpelji aproksimativno porazdelitev \bar{X} . Poišči približen dvostranski interval zaupanja za λ , kjer naj bo edini približek v izpeljavi aproksimativna porazdelitev \bar{X} .

Namig: pri izpeljavi približnega dvostranskega intervala zaupanja za λ začni z nastavkom

$$P\left(\lambda \in \left[\frac{1}{\bar{X}} - R, \frac{1}{\bar{X}} + R\right]\right) = q.$$