Statistika 1
Drugo poglavje
Abstraktni integral

Matjaž Omladič

Oktober 2011

Vsebina

Motivacija

Slučajno spremenljivko X si predstavljamo kot vrednost (torej realno število), ki je odvisna od slučaja. Matematično modeliramo slučaj preko verjetnostnega prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. *Slučajna spremenljivka* je taka preslikava $X : \Omega \to \mathbb{R}$, da je

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in B\} =: \{X \in B\}$$

dogodek, torej element σ-algebre $\mathcal{F}$, za vsako Borelovo množico $B \subseteq \mathbb{R}$. Definirajmo nekoliko splošneje.

Definicija. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor. Funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se imenuje (*po Borelu*) *merljiva ali Borelova*, če velja: $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za vse Borelove množice $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Ekvivalentno: praslike odprtih (zaprtih) množic so merljive množice.

Na verjetnostnih prostorih poimenujemo merljive množice *dogodki*, merljive funkcije pa *slučajne spremenljivke*. Drugače povedano: pri slučajnih spremenljivkah so praslike Borelovih množic dogodki.

Motivacija

Slučajno spremenljivko X si predstavljamo kot vrednost (torej realno število), ki je odvisna od slučaja. Matematično modeliramo slučaj preko verjetnostnega prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. *Slučajna spremenljivka* je taka preslikava $X : \Omega \to \mathbb{R}$, da je

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in B\} =: \{X \in B\}$$

dogodek, torej element σ-algebre $\mathcal{F}$, za vsako Borelovo množico $B \subseteq \mathbb{R}$. Definirajmo nekoliko splošneje.

Definicija. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor. Funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se imenuje (*po Borelu*) *merljiva ali Borelova*, če velja: $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za vse Borelove množice $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Ekvivalentno: praslike odprtih (zaprtih) množic so merljive množice.

Na verjetnostnih prostorih poimenujemo merljive množice *dogodki*, merljive funkcije pa *slučajne spremenljivke*. Drugače povedano: pri slučajnih spremenljivkah so praslike Borelovih množic dogodki.

Kaj so merljive funkcije

Zgled. Indikatorska funkcija vsakega dogodka je slučajna spremenljivka. Indikatorska (oz. karakteristična) funkcija χ_A je slučajna spremenljivka natanko tedaj, ko je A merljiva množica.

Izrek (Merljive funkcije)

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor. Imejmo funkcije $f, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}^n$ in $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tedaj veljajo naslednje trditve.

1. *Če je $\mathcal{A}$ algebra množic, ki generira Borelove množice, in je $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ za vsak $A \in \mathcal{A}$, potem je f merljiva.*
2. *Če je g zvezna, potem je merljiva (glede na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).*
3. *Če sta f_1 in f_2 merljivi, potem je merljiva tudi funkcija $h(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega)), \omega \in \Omega$.*
4. *Kompozitum merljivih funkcij je merljiva funkcija.*
5. *Če so f, f_1 in f_2 merljive, potem sta αf in $f_1 + f_2$ merljivi za poljuben realen α. Pri n=1 je tudi $f_1 \cdot f_2$ merljiva.*

Kaj so merljive funkcije

Zgled. Indikatorska funkcija vsakega dogodka je slučajna spremenljivka. Indikatorska (oz. karakteristična) funkcija χ_A je slučajna spremenljivka natanko tedaj, ko je A merljiva množica.

Izrek (Merljive funkcije)

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor. Imejmo funkcije $f, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}^n$ in $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tedaj veljajo naslednje trditve.

1. *Če je $\mathcal{A}$ algebra množic, ki generira Borelove množice, in je $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ za vsak $A \in \mathcal{A}$, potem je f merljiva.*
2. *Če je g zvezna, potem je merljiva (glede na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).*
3. *Če sta f_1 in f_2 merljivi, potem je merljiva tudi funkcija $h(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega)), \omega \in \Omega$.*
4. *Kompozitum merljivih funkcij je merljiva funkcija.*
5. *Če so f, f_1 in f_2 merljive, potem sta αf in $f_1 + f_2$ merljivi za poljuben realen α. Pri n=1 je tudi $f_1 \cdot f_2$ merljiva.*

Dokaz izreka — 1

Izrek (Merljive funkcije — nadaljevanje)

6 *Če so $f_1, f_2, \ldots$ merljive funkcije, potem so pri $n = 1$ tudi* $\sup_k f_k, \inf_k f_k, \limsup_k f_k, \liminf_k f_k$ *merljive funkcije. Če zaporedje $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergira po točkah, je merljiva tudi limita tega zaporedja. (Vse te funkcije so definirane po točkah.)*

Točka 1. Sledi po izreku o monotonih razredih, ker je

$$\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

monotoni razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$ in je $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Točka 2. Pri zveznih funkcijah je praslika vsake odprte množice odprta (in zato merljiva), praslika vsake zaprte množice pa zaprta (in zato merljiva). Prav tako je praslika unije dveh množic enaka uniji praslik teh dveh množic.

Dokaz izreka — 1

Izrek (Merljive funkcije — nadaljevanje)

6 *Če so $f_1, f_2, \dots$ merljive funkcije, potem so pri $n = 1$ tudi* $\sup_k f_k, \inf_k f_k, \limsup_k f_k, \liminf_k f_k$ *merljive funkcije. Če zaporedje $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergira po točkah, je merljiva tudi limita tega zaporedja. (Vse te funkcije so definirane po točkah.)*

Točka 1. Sledi po izreku o monotonih razredih, ker je

$$\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

monotoni razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$ in je $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Točka 2. Pri zveznih funkcijah je praslika vsake odprte množice odprta (in zato merljiva), praslika vsake zaprte množice pa zaprta (in zato merljiva). Prav tako je praslika unije dveh množic enaka uniji praslik teh dveh množic.

Dokaz izreka — 2

Praslike algebre, generirane z odprtimi množicami, so zato merljive in točka 2 sledi po točki 1. **Točka 4** je preprosta posledica identitete $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Funkcije $g(x) = \alpha x$, $g(x, y) = x + y$ in $g(x, y) = xy$ so zvezne v običajnem pomenu iz analize. **Točka 5** sledi zato iz točk 2, 3 in 4. **Točka 3**. Naj bo P odprt pravokotnik, torej oblike $A \times B$, kjer sta A in B odprti podmnožici $\mathbb{R}^n$. Potem je $h^{-1}(P) = f_1^{-1}(A)f_2^{-1}(B)$ merljiva.

Preostane nam dokazati **točko 6**. Privzemimo odslej, da je $n = 1$ in vpeljimo $S(\omega) = \sup_k f_k(\omega)$. Tedaj velja

$$S^{-1}((-\infty, x]) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$$

za vse realne x.

Dokaz izreka — 2

Praslike algebre, generirane z odprtimi množicami, so zato merljive in točka 2 sledi po točki 1. **Točka 4** je preprosta posledica identitete $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Funkcije $g(x) = \alpha x$, $g(x, y) = x + y$ in $g(x, y) = xy$ so zvezne v običajnem pomenu iz analize. **Točka 5** sledi zato iz točk 2, 3 in 4. **Točka 3**. Naj bo P odprt pravokotnik, torej oblike $A \times B$, kjer sta A in B odprti podmnožici $\mathbb{R}^n$. Potem je $h^{-1}(P) = f_1^{-1}(A) f_2^{-1}(B)$ merljiva.

Preostane nam dokazati **točko 6**. Privzemimo odslej, da je $n = 1$ in vpeljimo $S(\omega) = \sup_k f_k(\omega)$. Tedaj velja

$$S^{-1}((-\infty, x]) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$$

za vse realne x.

Dokaz izreka — 3

Ker je $S^{-1}((x, y]) = S^{-1}((-\infty, y]) \setminus S^{-1}((-\infty, x])$ za vse realne $x < y$, sledi $S^{-1}((x, y]) \in \mathcal{F}$. Družina vseh končnih unij množic oblike $(x, y]$ je algebra, ki generira Borelovo σ-algebro. Funkcija $\sup_k f_k$ je zato merljiva po točki 1.

Uporabimo točko 4 na funkciji $g(x) = -x$ (ta je merljiva, ker je zvezna in velja točka 2), da ugotovimo, da je tudi funkcija $\inf_k f_k = -\sup_k(-f_k)$ merljiva. Od tod sledita tudi preostali dve trditvi, saj je npr. $\limsup_k f_k = \inf_k \sup_{m \geq k} f_m$.

Dokaz izreka — 3

Ker je $S^{-1}((x,y]) = S^{-1}((-\infty,y]) \setminus S^{-1}((-\infty,x])$ za vse realne $x < y$, sledi $S^{-1}((x,y]) \in \mathcal{F}$. Družina vseh končnih unij množic oblike $(x,y]$ je algebra, ki generira Borelovo σ-algebro. Funkcija $\sup_k f_k$ je zato merljiva po točki 1.

Uporabimo točko 4 na funkciji $g(x) = -x$ (ta je merljiva, ker je zvezna in velja točka 2), da ugotovimo, da je tudi funkcija $\inf_k f_k = -\sup_k(-f_k)$ merljiva. Od tod sledita tudi preostali dve trditvi, saj je npr. $\limsup_k f_k = \inf_k \sup_{m \geqslant k} f_m$.

Motivacija

Spet začnimo z motivacijo. V klasični verjetnosti je matematično upanje za diskretne slučajne spremenljivke podano z vsoto "po verjetnostni funkciji" in za zvezne z (Riemannovim) integralom "po zvezni verjetnostni gostoti". Pristop preko mere nam omogoča vpeljati abstraktni integral, ki v enem zapisu zaobjame oba navidez različna pojma.

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s končno mero. Vpeljali bomo abstraktni integral $\int f\, d\mu$ za merljive funkcije $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ v treh korakih. V prvem koraku bomo integral definirali na enostavnih merljivih funkcijah.

Primer enostavne merljive funkcije je funkcija oblike $f = c\chi_A$, kjer je A merljiva množica in c realno število. Zanjo postavimo $\int f\, d\mu = c\mu(A)$. Splošneje so enostavne funkcije vse linearne kombinacije takih funkcij.

Motivacija

Spet začnimo z motivacijo. V klasični verjetnosti je matematično upanje za diskretne slučajne spremenljivke podano z vsoto "po verjetnostni funkciji" in za zvezne z (Riemannovim) integralom "po zvezni verjetnostni gostoti". Pristop preko mere nam omogoča vpeljati abstraktni integral, ki v enem zapisu zaobjame oba navidez različna pojma.

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s končno mero. Vpeljali bomo abstraktni integral $\int f\, d\mu$ za merljive funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$ v treh korakih. V prvem koraku bomo integral definirali na enostavnih merljivih funkcijah.

Primer enostavne merljive funkcije je funkcija oblike $f = c\chi_A$, kjer je A merljiva množica in c realno število. Zanjo postavimo $\int f\, d\mu = c\mu(A)$. Splošneje so enostavne funkcije vse linearne kombinacije takih funkcij.

Korak I : Enostavne funkcije

Definicija. *Enostavna (merljiva) funkcija* je funkcija oblike $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$, kjer so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paroma disjuktne merljive množice in $c_1, c_2, \ldots, c_n$ realna števila. Za vsako tako funkcijo postavimo $\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j)$. Premisliti moramo, da je ta definicija dobra. Potem pa še naslednji izrek.

Izrek (Lastnosti integrala na enostavnih funkcijah)

1. *Če je f enostavna funkcija, je tudi $|f|$ enostavna funkcija in velja $\left|\int f \, d\mu\right| \leqslant \int |f| \, d\mu$.*
2. *Če je f nenegativna in enostavna, je $\int f \, d\mu \geqslant 0$.*
3. *Če sta f in g enostavni funkciji ter α in β realni števili, potem je*

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Korak I : Enostavne funkcije

Definicija. *Enostavna (merljiva) funkcija* je funkcija oblike $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$, kjer so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paroma disjuktne merljive množice in $c_1, c_2, \ldots, c_n$ realna števila. Za vsako tako funkcijo postavimo $\int f\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j)$. Premisliti moramo, da je ta definicija dobra. Potem pa še naslednji izrek.

Izrek (Lastnosti integrala na enostavnih funkcijah)

1. *Če je f enostavna funkcija, je tudi $|f|$ enostavna funkcija in velja $\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \int |f|\, d\mu$.*
2. *Če je f nenegativna in enostavna, je $\int f\, d\mu \geqslant 0$.*
3. *Če sta f in g enostavni funkciji ter α in β realni števili, potem je*

$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu.$$

Korak I : Enostavne funkcije – nadaljevanje

Lastnost 1 integrala je *trikotniška neenakost*, lastnost 2 je *pozitivnost integrala* oz. točneje *nenegativnost*, lastnost 3 pa *linearnost*. Drugače povedano, preslikava $\Lambda(f) := \int f\, d\mu$ definira na vektorskem prostoru enostavnih funkcij *nenegativni linearni funkcional*.

Še eno posledico tega dejstva dobimo takoj iz definicije oziroma druge točke izreka. To je *monotonost integrala*.

Izrek (Nadaljevanje)

4. *Če sta $f \leqslant g$ enostavni funkciji, velja $\int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu$.*

Korak I : Enostavne funkcije – nadaljevanje

Lastnost 1 integrala je *trikotniška neenakost*, lastnost 2 je *pozitivnost integrala* oz. točneje *nenegativnost*, lastnost 3 pa *linearnost*. Drugače povedano, preslikava $\Lambda(f) := \int f \, d\mu$ definira na vektorskem prostoru enostavnih funkcij *nenegativni linearni funkcional*.

Še eno posledico tega dejstva dobimo takoj iz definicije oziroma druge točke izreka. To je *monotonost integrala*.

Izrek (Nadaljevanje)

4. *Če sta $f \leqslant g$ enostavni funkciji, velja $\int f \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu$.*

Korak II : Omejene merljive funkcije

Integral omejenih merljivih funkcij vpeljemo tako, da jih aproksimiramo z enostavnimi.

Izrek (Aproksimacija omejenih merljivih funkcij z enostavnimi)

Za vsako omejeno merljivo funkcijo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ obstajata zaporedji enostavnih merljivih funkcij $\underline{f}_n, \overline{f}_n$ za $n = 1, 2, \ldots$ z lastnostmi $\underline{f}_n \uparrow f, \overline{f}_n \downarrow f$ in $0 \leqslant \overline{f}_n - \underline{f}_n \leqslant 2^{-n}$, ko gre $n \to \infty$.

Iz prejšnjega izreka dobimo

$$\underline{I}_n := \int \underline{f}_n \, d\mu \leqslant \int \overline{f}_n \, d\mu =: \overline{I}_n,$$

pa tudi (*) $0 \leqslant \overline{I}_n - \underline{I}_n \leqslant 2^{-n}\mu(\Omega)$. Zaporedje $\underline{I}_n$ narašča, zaporedje $\overline{I}_n$ pa pada, zato sta konvergentni, zaradi (*) pa imata isto limito, ki jo proglasimo za $\int f \, d\mu$. Preveriti se da, da je ta definicija neodvisna od dejanske izbire zgornjih zaporedij.

Korak II : Omejene merljive funkcije

Integral omejenih merljivih funkcij vpeljemo tako, da jih aproksimiramo z enostavnimi.

Izrek (Aproksimacija omejenih merljivih funkcij z enostavnimi)

Za vsako omejeno merljivo funkcijo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ obstajata zaporedji enostavnih merljivih funkcij $\underline{f}_n, \overline{f}_n$ za $n = 1, 2, \dots$ z lastnostmi $\underline{f}_n \uparrow f, \overline{f}_n \downarrow f$ in $0 \leqslant \overline{f}_n - \underline{f}_n \leqslant 2^{-n}$, ko gre $n \to \infty$.

Iz prejšnjega izreka dobimo

$$\underline{I}_n := \int \underline{f}_n \, d\mu \leqslant \int \overline{f}_n \, d\mu =: \overline{I}_n,$$

pa tudi (*) $0 \leqslant \overline{I}_n - \underline{I}_n \leqslant 2^{-n}\mu(\Omega)$. Zaporedje $\underline{I}_n$ narašča, zaporedje $\overline{I}_n$ pa pada, zato sta konvergentni, zaradi (*) pa imata isto limito, ki jo proglasimo za $\int f \, d\mu$. Preveriti se da, da je ta definicija neodvisna od dejanske izbire zgornjih zaporedij.

Korak III : Splošne merljive funkcije

Najprej vpeljemo integral za **pozitivno merljivo funkcijo** $f : \Omega \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Priredimo ji zaporedje omejenih merljivih funkcij $f_n = \min(f, n)$, ki monotono narašča proti f. Limita zaporedja integralov $\int f_n \, d\mu$ vselej obstaja, končna ali neskončna. Postavimo jo za integral $\int f \, d\mu$.

Premislimo lahko, da bi v tej definiciji smeli zamenjati zaporedje n s poljubnim drugim proti neskončno naraščajočim zaporedjem realnih števil in prišli do iste limite.

Splošni merljivi funkciji $f : \Omega \to \mathbb{R}$ priredimo nenegativni merljivi funkciji $f^+ = \max(f, 0)$ in $f^- = -\min(f, 0)$ z lastnostmi $f = f^+ - f^-$ in $|f| = f^+ + f^-$. *Abstraktni (Lebesguov) integral* vpeljemo za funkcije f, pri katerih je $\int |f| d\mu < \infty$, pravimo jim *integrabilne funkcije*. Zanje postavimo

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Korak III : Splošne merljive funkcije

Najprej vpeljemo integral za **pozitivno merljivo funkcijo** $f : \Omega \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Priredimo ji zaporedje omejenih merljivih funkcij $f_n = \min(f, n)$, ki monotono narašča proti f. Limita zaporedja integralov $\int f_n \, d\mu$ vselej obstaja, končna ali neskončna. Postavimo jo za integral $\int f \, d\mu$.

Premislimo lahko, da bi v tej definiciji smeli zamenjati zaporedje n s poljubnim drugim proti neskončno naraščajočim zaporedjem realnih števil in prišli do iste limite.

Splošni merljivi funkciji $f : \Omega \to \mathbb{R}$ priredimo nenegativni merljivi funkciji $f^+ = \max(f, 0)$ in $f^- = -\min(f, 0)$ z lastnostmi $f = f^+ - f^-$ in $|f| = f^+ + f^-$. *Abstraktni (Lebesguov) integral* vpeljemo za funkcije f, pri katerih je $\int |f| d\mu < \infty$, pravimo jim *integrabilne funkcije*. Zanje postavimo

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Osnovne lastnosti integrala

Izrek (Lastnosti Lebesguovega integrala)

Vse funkcije v naslednjih točkah naj bodo merljive in integrabilne, torej naj imajo končen integral absolutne vrednosti. Potem veljajo naslednje trditve.

1. *(Trikotniška neenakost) Vselej je* $\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \int |f|\, d\mu$.
2. *(Pozitivnost) Če je* f *nenegativna, je* $\int f\, d\mu \geqslant 0$.
3. *(Linearnost) Če sta* α *in* β *poljubni realni števili, potem je*
$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu.$$
4. *(Monotonost) Če velja* $f \leqslant g$*, potem velja* $\int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu$.

Dokazujemo korak za korakom iz analognih lastnosti za enostavne merljive funkcije.

Matematično upanje slučajne spremenljivke

Definicija. Tako vpeljani integral poimenujemo *nedoločeni integral merljive funkcije* f. Vpeljemo še *določeni integral merljive funkcije* f *za poljubno merljivo množico* $A \in \mathcal{F}$:

$$\int_A f \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu,$$

če je $f \geqslant 0$ ali pa je $\int_A f \, d\mu < +\infty$.

Na podoben način lahko vpeljemo tudi abstraktni Lebesguov integral po poljubni meri, ki ni nujno končna. Vse naštete lastnosti veljajo.

Matematično upanje slučajne spremenljivke

Definicija. Tako vpeljani integral poimenujemo *nedoločeni integral merljive funkcije f*. Vpeljemo še *določeni integral merljive funkcije f za poljubno merljivo množico $A \in \mathcal{F}$*:

$$\int_A f\,d\mu = \int f\chi_A\,d\mu,$$

če je $f \geqslant 0$ ali pa je $\int_A f\,d\mu < +\infty$.
Na podoben način lahko vpeljemo tudi abstraktni Lebesguov integral po poljubni meri, ki ni nujno končna. Vse naštete lastnosti veljajo.

Definicija. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ verjetnostni prostor in $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka, t.j. poljubna Borelova funkcija. Tedaj je $\mathrm{E}X := \int X\,d\mathrm{P}$ *matematično upanje* te slučajne spremenljivke. Matematično upanje obstaja, če je X integrabilna. Za poljuben dogodek $A \in \mathcal{F}$ pišemo tudi $\mathrm{E}[X; A] := \mathrm{E}(X\chi_A)$.

Matematično upanje slučajne spremenljivke

Definicija. Tako vpeljani integral poimenujemo *nedoločeni integral merljive funkcije* f. Vpeljemo še *določeni integral merljive funkcije* f *za poljubno merljivo množico* $A \in \mathcal{F}$:

$$\int_A f\,d\mu = \int f\chi_A\,d\mu,$$

če je $f \geqslant 0$ ali pa je $\int_A f\,d\mu < +\infty$.

Na podoben način lahko vpeljemo tudi abstraktni Lebesguov integral po poljubni meri, ki ni nujno končna. Vse naštete lastnosti veljajo.

Definicija. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ verjetnostni prostor in $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka, t.j. poljubna Borelova funkcija. Tedaj je $\mathrm{E}X := \int X\,d\mathrm{P}$ *matematično upanje* te slučajne spremenljivke. Matematično upanje obstaja, če je X integrabilna. Za poljuben dogodek $A \in \mathcal{F}$ pišemo tudi $\mathrm{E}[X; A] := \mathrm{E}(X\chi_A)$.

Pomembna zgleda za uporabo

Obstaja zveza med Riemannovim in Lebesguovim integralom.

Izrek (Lebesgue-Vitalijev izrek)

Omejena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je zvezna skoraj povsod glede na Lebesguovo mero. Tedaj se njen Rimannov integral ujema z Lebesguovim integralom po Lebesguovi meri.

V primeru diskretne slučajne spremenljivke z verjetnostno funkcijo $X \sim (f_k)_k$, kjer je $P(X = x_k) = f_k$, velja

$$\mathrm{E}X = \sum_k x_k f_k.$$

V primeru zvezne slučajne spremenljivke s porazdelitveno gostoto f pa velja

$$\mathrm{E}X = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

Pomembna zgleda za uporabo

Obstaja zveza med Riemannovim in Lebesguovim integralom.

Izrek (Lebesgue-Vitalijev izrek)

Omejena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je zvezna skoraj povsod glede na Lebesguovo mero. Tedaj se njen Rimannov integral ujema z Lebesguovim integralom po Lebesguovi meri.

V primeru diskretne slučajne spremenljivke z verjetnostno funkcijo $X \sim (f_k)_k$, kjer je $P(X = x_k) = f_k$, velja

$$\mathrm{E}X = \sum_k x_k f_k.$$

V primeru zvezne slučajne spremenljivke s porazdelitveno gostoto f pa velja

$$\mathrm{E}X = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx.$$

Momenti izraženi z porazdelitvenim zakonom

Poenotimo oba primera z vpeljavo pojma *porazdelitvenega zakona* P_X slučajne spremenljikve X. To je verjetnostna mera na Borelovih množicah na $\mathbb{R}$. Dobimo jo iz (kumulativne) porazdelitvene funkcije $F_X(x) = \mathrm{P}\left(\{X \leqslant x\}\right) = \mathrm{P}(X \leqslant x)$. Najprej jo vpeljemo na polodprtih intervalih

$$\mathrm{P}_X(\,(x, y]\,) = \mathrm{P}(x < X \leqslant y) = F_X(y) - F_X(x),$$

nato pa jo razširimo do mere na Borelovih množicah po istem postopku kot v dokazu obstoja Lebesguove mere. S tem zakonom se izraža matematično upanje na enoten način

$$\mathrm{E}X = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mathrm{P}_X \,.$$

Prostori $L^p(\mathrm{P})$ — 1

Definicija. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ verjetnostni prostor in $p \in (0, \infty)$. Na množici slučajnih spremenljivk X, ki imajo integrabilno potenco $|X|^p$, vpeljemo ekvivalenčno *relacijo skoraj gotove enakosti*: $X \sim Y \Leftrightarrow \mathrm{P}(X = Y) = 1$. Dobljeno faktorsko množico opremimo s *p-to normo* $\|X\|_p := (E|X|^p)^{1/p}$. Dobimo *vektorski prostor*, ki je pri $p \geqslant 1$ tudi *normiran*, in ga označimo z $L^p(\mathrm{P})$.

Izrek (Lastnosti prostorov $L^p(\mathrm{P})$)

1. *(Absolutna homogenost)*

$$\|aX\|_p = |a|\|X\|_p \quad za \quad a \in \mathbb{R} \quad in \quad X \in L^p(\mathrm{P})$$

2. *(Neenačba Minkowskega)*

$$\|X + Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p \quad za \quad p \geqslant 1 \quad in \quad X, Y \in L^p(\mathrm{P})$$

Prostori $L^p(\mathrm{P})$ – 1

Definicija. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ verjetnostni prostor in $p \in (0, \infty)$. Na množici slučajnih spremenljivk X, ki imajo integrabilno potenco $|X|^p$, vpeljemo ekvivalenčno *relacijo skoraj gotove enakosti*: $X \sim Y \Leftrightarrow \mathrm{P}(X = Y) = 1$. Dobljeno faktorsko množico opremimo s *p-to normo* $\|X\|_p := (E|X|^p)^{1/p}$. Dobimo *vektorski prostor*, ki je pri $p \geqslant 1$ tudi *normiran*, in ga označimo z $L^p(\mathrm{P})$.

Izrek (Lastnosti prostorov $L^p(\mathrm{P})$)

1. *(Absolutna homogenost)*

$$\|aX\|_p = |a|\|X\|_p \quad \textit{za} \quad a \in \mathbb{R} \quad \textit{in} \quad X \in L^p(\mathrm{P})$$

2. *(Neenačba Minkowskega)*

$$\|X + Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p \quad \textit{za} \quad p \geqslant 1 \quad \textit{in} \quad X, Y \in L^p(\mathrm{P})$$

Prostori $L^p(\mathrm{P})$ – 2

Izrek (Lastnosti prostorov $L^p(\mathrm{P})$ nadaljevanje)

3. *(Hölderjeva neenačba)*

$$\|XY\|_1 \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q \text{ za } p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$X \in L^p(\mathrm{P}),\ \ Y \in L^q(\mathrm{P})$$

4. *(Neenačba Cauchy-Schwarz-Bunjakovski)*

$$\|XY\|_1 \leqslant \|X\|_2 \|Y\|_2 \ \text{ za }\ X, Y \in L^2(\mathrm{P})$$

5. *(Jensenova neenačba)* $\int \psi(X) d\mathrm{P} \geqslant \psi(\int X d\mathrm{P})$ *za poljubno konveksno funkcijo* ψ *in integrabilno slučajno spremenljivko* X

6. *Če je* $r > p \geqslant 1$, *je* $L^r(\mathrm{P}) \subseteq L^p(\mathrm{P})$.

Prostori $L^p(\mathrm{P})$ — 3

Če je $p \geqslant 1$, lahko s predpisom $d(X, Y) = \|X - Y\|^p, X, Y \in L^p(P)$ vpeljemo razdaljo in dobimo metričen prostor.

Podobno lahko vpeljemo prostore $L^p(\mu)$ za poljubno mero μ in lastnosti od 1 do 4 še zmerom veljajo. Za lastnost 6 potrebujemo končnost mere.

Prostori $L^p(\mathrm{P})$ – 3

Če je $p \geqslant 1$, lahko s predpisom $d(X, Y) = \|X - Y\|^p, X, Y \in L^p(P)$ vpeljemo razdaljo in dobimo metričen prostor.

Podobno lahko vpeljemo prostore $L^p(\mu)$ za poljubno mero μ in lastnosti od 1 do 4 še zmerom veljajo. Za lastnost 6 potrebujemo končnost mere.

Načini konvergence

Naj bodo $X, X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajne spremenljivke na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Definicija. Zaporedje X_n *konvergira skoraj gotovo (s.g.)* proti X, če je

$$\mathrm{P}(\limsup_{n\to\infty} |X_n - X| > 0) = 0.$$

Ekvivalentno: $\mathrm{P}(X_n \nrightarrow X) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(X_n \to X) = 1$. Pišemo $X_n \xrightarrow{\text{s.g.}} X$.

Definicija. Zaporedje X_n *konvergira v prostoru* $L^p(\mathrm{P})$, $p > 0$, proti X, če $\|X_n - X\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Pišemo $X_n \xrightarrow{p} X$.

Definicija. Zaporedje X_n *konvergira verjetnostno* proti X, če $\mathrm{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ za vsako pozitivno število ε. Pišemo $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$.

Načini konvergence

Naj bodo $X, X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajne spremenljivke na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Definicija. Zaporedje X_n *konvergira skoraj gotovo (s.g.)* proti X, če je

$$\mathrm{P}(\limsup_{n\to\infty} |X_n - X| > 0) = 0.$$

Ekvivalentno: $\mathrm{P}(X_n \nrightarrow X) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(X_n \to X) = 1$. Pišemo $X_n \xrightarrow{\text{s.g.}} X$.

Definicija. Zaporedje X_n *konvergira v prostoru* $L^p(\mathrm{P})$, $p > 0$, proti X, če $\|X_n - X\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Pišemo $X_n \xrightarrow{p} X$.

Definicija. Zaporedje X_n *konvergira verjetnostno* proti X, če $\mathrm{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ za vsako pozitivno število ε. Pišemo $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$.

Odnosi med konvergencami

Izrek (Odnosi med konvergencami)

Tako skoraj gotova konvergenca kot konvergenca v L^p imata za posledico verjetnostno konvergenco. Če pa konvergira $\sup_{j\geqslant n}|X_j| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ verjetnostno, potem konvergira X_n s.g. proti 0.

Dokažimo še dve neenačbi, ki sta uporabni v dokazu tega izreka, pa tudi sicer.

Neenačba Markova. Za vsak $X \in L^1(\mathrm{P})$ in vsak $\lambda > 0$ velja

$$\mathrm{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\|X\|_1}{\lambda}.$$

Neenačba Čebiševa (1846). Za poljubne $\lambda, p > 0$ in $X \in L^p(\mathrm{P})$ velja

$$\mathrm{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\|X\|_p^p}{\lambda^p}.$$

Odnosi med konvergencami

Izrek (Odnosi med konvergencami)

Tako skoraj gotova konvergenca kot konvergenca v L^p imata za posledico verjetnostno konvergenco. Če pa konvergira $\sup_{j \geqslant n} |X_j| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ verjetnostno, potem konvergira X_n s.g. proti 0.

Dokažimo še dve neenačbi, ki sta uporabni v dokazu tega izreka, pa tudi sicer.

Neenačba Markova. Za vsak $X \in L^1(\mathrm{P})$ in vsak $\lambda > 0$ velja

$$\mathrm{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\|X\|_1}{\lambda}.$$

Neenačba Čebiševa (1846). Za poljubne $\lambda, p > 0$ in $X \in L^p(\mathrm{P})$ velja

$$\mathrm{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\|X\|_p^p}{\lambda^p}.$$

Odnosi med konvergencami — dokaz izreka

Ideja dokaza izreka. Iz konvergence v L^p sledi verjetnostna konvergenca po neenačbi Čebiševa. Dejstvo, da $X_n \xrightarrow{\text{s.g.}} X$ velja natanko tedaj, kadar je $\mathrm{P}(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}) = 0$ za vsako pozitivno število ε. Po zveznosti od zgoraj velja

$$X_n \xrightarrow{\text{s.g.}} X \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}) = 0 \text{ za vsak } \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Zaradi tega iz skoraj gotove konvergence sledi verjetnostna. Če pa konvergira $\sup_{j\geqslant n} |X_j| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ verjetnostno, potem je

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\bigcup_{j\geqslant n} \{|X_j| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\sup_{j\geqslant n} |X_j| \geqslant \varepsilon) = 0$$

za vsak $\varepsilon > 0$, kar pa je po (1) ekvivalentno z $X_n \xrightarrow{\text{s.g.}} 0$.

Osnovni limitni izreki — 1

Izrek (o omejeni konvergenci)

Naj slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ *na verjetnostnem prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *konvergirajo verjetnostno proti neki slučajni spremenljivki* X *in naj bodo vse absolutno omejene z isto konstantno* K. *Tedaj konvergira* $\mathrm{E}X_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{E}X$.

Dokaz. Vpeljimo dogodke $A_n = \{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}$ pri izbranem pozitivnem številu ε. Tedaj je $|\mathrm{E}X_n - \mathrm{E}X| \leqslant \mathrm{E}|X_n - X| = \mathrm{E}[|X_n - X|; A_n] + \mathrm{E}[|X_n - X|; A_n^c] \leqslant 2K\mathrm{P}(A_n) + \varepsilon$.

Izrek (Fatoujeva lema)

Za nenegativne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ *na verjetnostnem prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *velja*

$$\mathrm{E}[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n.$$

Osnovni limitni izreki — 1

Izrek (o omejeni konvergenci)

Naj slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ *na verjetnostnem prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *konvergirajo verjetnostno proti neki slučajni spremenljivki* X *in naj bodo vse absolutno omejene z isto konstantno* K. *Tedaj konvergira* $\mathrm{E}X_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{E}X$.

Dokaz. Vpeljimo dogodke $A_n = \{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}$ pri izbranem pozitivnem številu ε. Tedaj je $|\mathrm{E}X_n - \mathrm{E}X| \leqslant \mathrm{E}|X_n - X| = \mathrm{E}[|X_n - X|; A_n] + \mathrm{E}[|X_n - X|; A_n^c] \leqslant 2K\mathrm{P}(A_n) + \varepsilon$.

Izrek (Fatoujeva lema)

Za nenegativne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ *na verjetnostnem prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *velja*

$$\mathrm{E}[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n.$$

Osnovni limitni izreki — 2

Dokaz. Za $Y_n = \inf_{j \geqslant n} X_j$ velja $Y_n \uparrow X := \liminf_{n\to\infty} X_n$. Pri poljubni konstanti $K > 0$ je zato $\{X \wedge K - Y_n \wedge K\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje, ki konvergira proti 0. Po izreku o omejeni konvergenci je $\liminf_{n\to\infty} \int X_n \, d\mathrm{P} \geqslant \lim_{n\to\infty} \int (Y_n \wedge K) \, d\mathrm{P} = \int (X \wedge K) \, d\mathrm{P}$. Dejstvo, da je $\lim_{K\uparrow\infty} \int (X \wedge K) \, d\mathrm{P} = \int X \, d\mathrm{P}$, pa potem sledi po definiciji integrala.

Izrek (o monotoni konvergenci)

Če je zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ nenegativno in naraščajoče, potem velja

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} X_n = \mathrm{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right].$$

Dokaz. Po monotonosti obstaja limita na levi in ne presega vrednosti integrala na desni, obratna neenakost pa sledi po Fatoujevi lemi.

Osnovni limitni izreki — 2

Dokaz. Za $Y_n = \inf_{j \geqslant n} X_j$ velja $Y_n \uparrow X := \liminf_{n\to\infty} X_n$. Pri poljubni konstanti $K > 0$ je zato $\{X \wedge K - Y_n \wedge K\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje, ki konvergira proti 0. Po izreku o omejeni konvergenci je $\liminf_{n\to\infty} \int X_n \, d\mathrm{P} \geqslant \lim_{n\to\infty} \int (Y_n \wedge K) \, d\mathrm{P} = \int (X \wedge K) \, d\mathrm{P}$. Dejstvo, da je $\lim_{K\uparrow\infty} \int (X \wedge K) \, d\mathrm{P} = \int X \, d\mathrm{P}$, pa potem sledi po definiciji integrala.

Izrek (o monotoni konvergenci)

Če je zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ nenegativno in naraščajoče, potem velja

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} X_n = \mathrm{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right].$$

Dokaz. Po monotonosti obstaja limita na levi in ne presega vrednosti integrala na desni, obratna neenakost pa sledi po Fatoujevi lemi.

Osnovni limitni izreki — 3

Izrek (o dominantni konvergenci)

Naj bo zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ *na verjetnostnem prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *absolutno omejeno z neko* L^1 *slučajno spremenljivko (npr.* M*) in naj konvergira skoraj gotovo proti neki slučajni spremenljivki* X*. Potem konvergira* $\mathrm{E}X_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{E}X$*.*

Dokaz. Fatoujevo lemo uporabimo na dveh nenegativnih zaporedjih $M + X_n$ in $M - X_n$, da dobimo

$$\mathrm{E}[\lim_{n\to\infty}(M \pm X_n)] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}[M \pm X_n].$$

Od obeh neenakosti odštejemo $\mathrm{E}M$ in dobimo

$$\mathrm{E}[\lim_{n\to\infty} X_n] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n =$$

$$= -\liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}[-X_n] \leqslant -\mathrm{E}[\lim_{n\to\infty}(-X_n)] = \mathrm{E}[\lim_{n\to\infty} X_n].$$

Osnovni limitni izreki — 3

Izrek (o dominantni konvergenci)

Naj bo zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ *na verjetnostnem prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *absolutno omejeno z neko* L^1 *slučajno spremenljivko (npr.* M*) in naj konvergira skoraj gotovo proti neki slučajni spremenljivki* X*. Potem konvergira* $\mathrm{E}X_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{E}X$.

Dokaz. Fatoujevo lemo uporabimo na dveh nenegativnih zaporedjih $M + X_n$ in $M - X_n$, da dobimo

$$\mathrm{E}[\lim_{n\to\infty}(M \pm X_n)] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}[M \pm X_n].$$

Od obeh neenakosti odštejemo $\mathrm{E}M$ in dobimo

$$\mathrm{E}[\lim_{n\to\infty} X_n] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n =$$

$$= -\liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}[-X_n] \leqslant -\mathrm{E}[\lim_{n\to\infty}(-X_n)] = \mathrm{E}[\lim_{n\to\infty} X_n].$$

Limitni izreki za splošne mere

Morda naj kot zanimivost omenimo, da veljajo vsi štirje glavni limitni izreki, ki smo jih tu navedli, za splošno končno mero μ namesto verjetnostne mere. Pri tem zamenjajo slučajne spremenljivke merljive funkcije, matematično upanje pa abstraktni Lebesguov integral.

Če pa izločimo izrek o omejeni konvergenci, potem preostali trije osnovni limitni izreki veljajo celo za povsem poljubne mere, le dokazi so nekoliko bolj zahtevni.

Limitni izreki za splošne mere

Morda naj kot zanimivost omenimo, da veljajo vsi štirje glavni limitni izreki, ki smo jih tu navedli, za splošno končno mero μ namesto verjetnostne mere. Pri tem zamenjajo slučajne spremenljivke merljive funkcije, matematično upanje pa abstraktni Lebesguov integral.

Če pa izločimo izrek o omejeni konvergenci, potem preostali trije osnovni limitni izreki veljajo celo za povsem poljubne mere, le dokazi so nekoliko bolj zahtevni.

Definicija

Za poljubno nenegativno merljivo funkcijo f na prostoru z mero $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je s predpisom $\nu(A) = \int_A f\, d\mu, A \in \mathcal{F}$, definirana mera.Zdaj pa si za dve meri μ in ν na istem merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ zastavimo tole naravno vprašanje. Kdaj obstaja taka funkcija $\pi_* \in L^1(\mu)$, da za vse merljive množice A velja, da je

$$\nu(A) = \int_A \pi_*\, d\mu? \tag{2}$$

Izkaže se, da je ta pogoj ekvivalenten s pogojem, da je

$$\int f\, d\nu = \int f \pi_*\, d\mu. \tag{3}$$

za vse omejene merljive funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Če obstaja funkcija $\pi_* \in L^1(\mu)$ z lastnostjo (2) oz. ekvivalentno z lastnostjo (3), potem jo poimenujemo *Radon-Nikodýmov odvod mere ν po meri μ* in pišemo $\pi_* = \frac{d\nu}{d\mu}$. To poimenovanje utemeljimo, ko prepišemo (3) v

Definicija

Za poljubno nenegativno merljivo funkcijo f na prostoru z mero $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je s predpisom $\nu(A) = \int_A f\, d\mu, A \in \mathcal{F}$, definirana mera.Zdaj pa si za dve meri μ in ν na istem merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ zastavimo tole naravno vprašanje. Kdaj obstaja taka funkcija $\pi_* \in L^1(\mu)$, da za vse merljive množice A velja, da je

$$\nu(A) = \int_A \pi_*\, d\mu? \tag{2}$$

Izkaže se, da je ta pogoj ekvivalenten s pogojem, da je

$$\int f\, d\nu = \int f \pi_*\, d\mu. \tag{3}$$

za vse omejene merljive funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Če obstaja funkcija $\pi_* \in L^1(\mu)$ z lastnostjo (2) oz. ekvivalentno z lastnostjo (3), potem jo poimenujemo *Radon-Nikodýmov odvod mere ν po meri μ* in pišemo $\pi_* = \frac{d\nu}{d\mu}$. To poimenovanje utemeljimo, ko prepišemo (3) v

Absolutna zveznost

$$\int f\,d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu.$$

Definicija. Naj bosta μ in ν dve meri na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Za mero ν pravimo, da je *absolutno zvezna* glede na mero μ in pišemo $\nu << \mu$, če velja, da iz pogoja $\mu(A) = 0$ sledi $\nu(A) = 0$ za vse merljive množice $A \in \mathcal{F}$.

Izrek (Radon-Nikodýmov izrek)

Če sta $\nu << \mu$ končni meri na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, potem obstaja nenegativna merljiva funkcija $\pi_* \in L^1(\mu)$, ki izpolnjuje pogoj (3) za vse omejene merljive funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$. S temi pogoji je funkcija π_* skoraj gotovo enolično določena.

Ideja dokaza. Dokaz presega raven našega znanja.

Absolutna zveznost

$$\int f\, d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

Definicija. Naj bosta μ in ν dve meri na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Za mero ν pravimo, da je *absolutno zvezna* glede na mero μ in pišemo $\nu << \mu$, če velja, da iz pogoja $\mu(A) = 0$ sledi $\nu(A) = 0$ za vse merljive množice $A \in \mathcal{F}$.

Izrek (Radon-Nikodýmov izrek)

Če sta $\nu << \mu$ končni meri na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, potem obstaja nenegativna merljiva funkcija $\pi_* \in L^1(\mu)$, ki izpolnjuje pogoj (3) za vse omejene merljive funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$. S temi pogoji je funkcija π_* skoraj gotovo enolično določena.

Ideja dokaza. Dokaz presega raven našega znanja.

Ideja dokaza in primer

V prvem koraku namreč potrebujemo Rieszov izrek za Hilbertove prostore in dejstvo, da je $L^2(\mu)$ Hilbertov prostor. V tem koraku privzamemo, da je $\nu(A) \leqslant \mu(A)$ za vse $A \in \mathcal{F}$. Vpeljemo linearni funkcional $\Lambda(f) := \int f\, d\nu$ za $f \in L^1(\nu)$. Po neenačbi Cauchy-Schwarz-Bunjakovski dobimo $|\Lambda(f)|^2 \leqslant \nu(\Omega) \int |f|^2 d\mu$. Zato je Λ omejen funkcional na $L^2(\mu)$ in obstaja tak element $\pi_* \in L^2(\mu)$, da velja (3) za vse f iz $L^2(\mu)$. To je že zelo blizu zaključka izreka, le predpostavke in želeni prostori še niso čisto pravi. V drugem koraku sprostimo predpostavke in s tehničnimi premisleki pridemo do točnega rezultata, v tretjem pa dokažemo še enoličnost.

Ideja dokaza in primer

V prvem koraku namreč potrebujemo Rieszov izrek za Hilbertove prostore in dejstvo, da je $L^2(\mu)$ Hilbertov prostor. V tem koraku privzamemo, da je $\nu(A) \leqslant \mu(A)$ za vse $A \in \mathcal{F}$. Vpeljemo linearni funkcional $\Lambda(f) := \int f\, d\nu$ za $f \in L^1(\nu)$. Po neenačbi Cauchy-Schwarz-Bunjakovski dobimo $|\Lambda(f)|^2 \leqslant \nu(\Omega) \int |f|^2 d\mu$. Zato je Λ omejen funkcional na $L^2(\mu)$ in obstaja tak element $\pi_* \in L^2(\mu)$, da velja (3) za vse f iz $L^2(\mu)$. To je že zelo blizu zaključka izreka, le predpostavke in želeni prostori še niso čisto pravi. V drugem koraku sprostimo predpostavke in s tehničnimi premisleki pridemo do točnega rezultata, v tretjem pa dokažemo še enoličnost.

Primere Radon-Nikodýmovih odvodov v teoriji verjetnosti pogosto srečamo. Vsaka gostota porazdelitve pri zveznih slučajnih spremenljivkah je Radon-Nikodýmov odvod porazdelitvenega zakona te slučajne spremenljivke po Lebesguovi meri.

Ideja dokaza in primer

V prvem koraku namreč potrebujemo Rieszov izrek za Hilbertove prostore in dejstvo, da je $L^2(\mu)$ Hilbertov prostor. V tem koraku privzamemo, da je $\nu(A) \leqslant \mu(A)$ za vse $A \in \mathcal{F}$. Vpeljemo linearni funkcional $\Lambda(f) := \int f\, d\nu$ za $f \in L^1(\nu)$. Po neenačbi Cauchy-Schwarz-Bunjakovski dobimo $|\Lambda(f)|^2 \leqslant \nu(\Omega) \int |f|^2 d\mu$. Zato je Λ omejen funkcional na $L^2(\mu)$ in obstaja tak element $\pi_* \in L^2(\mu)$, da velja (3) za vse f iz $L^2(\mu)$. To je že zelo blizu zaključka izreka, le predpostavke in želeni prostori še niso čisto pravi. V drugem koraku sprostimo predpostavke in s tehničnimi premisleki pridemo do točnega rezultata, v tretjem pa dokažemo še enoličnost.

Primere Radon-Nikodýmovih odvodov v teoriji verjetnosti pogosto srečamo. Vsaka gostota porazdelitve pri zveznih slučajnih spremenljivkah je Radon-Nikodýmov odvod porazdelitvenega zakona te slučajne spremenljivke po Lebesguovi meri.