4. Martingali

Pogojno matematično upanje

Naj bo slučajna spremenljivka X iz $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in naj bo $\mathcal{G}$ σ-podalgebra σ-algebre $\mathcal{F}$. Tedaj obstaja slučajna spremenljivka $E[X|\mathcal{G}]$, ki jo poimenujemo *pogojno matematično upanje* slučajne spremenljivke X glede na σ-algebro $\mathcal{G}$, z lastnostmi:

(1) $E[X|\mathcal{G}]$ je $\mathcal{G}$-merljiva in integrabilna;

(2) za vse dogodke $G \in \mathcal{G}$ velja

$$\int_G XdP = \int_G E[X|\mathcal{G}]\, dP.$$

Zastavimo si vsaj dve vprašanji.

(a) Zakaj je ta definicija smiselna matematično?

(b) Zakaj je ta definicija smiselna intuitivno?

Na prvo vprašanje odgovorimo najprej v primeru, ko je $X \geq 0$. Tedaj definiramo mero ν s predpisom

$$\nu(F) = \int_F XdP, F \in \mathcal{F}.$$

Očitno je mera $\nu|_{\mathcal{G}}$ absolutno zvezna glede na mero $P|_{\mathcal{G}}$. Po Radon-Nikodýmovem izreku zato obstaja funkcija z lastnostjo (2). Če pa X ni nujno nenegativna, jo zapišemo v obliki $X = X^+ - X^-$ in uporabimo ta premislek za vsako od slučajnih spremenljivk X^+ in X^- posebej. Tako smo dokazali naslednji izrek:

Izrek o obstoju. Pogojno matematično upanje vselej obstaja in je skoraj gotovo enolično.

Pogojna verjetnost dogodka $F \in \mathcal{F}$ glede na σ-algebro $\mathcal{G}$ je slučajna spremenljivka $P(F|\mathcal{G}) \coloneqq E[\chi_F|\mathcal{G}]$.

Pogojevanje glede na družino spremenljiv. Naj bo $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in J}$ neka družina slučajnih spremenljivk in $\mathcal{G} = \sigma(Y_\lambda; \lambda \in J)$ σ-algebra, generirana s to družino. Tedaj je $E[X|Y_\lambda; \lambda \in J] \coloneqq E[X|\mathcal{G}]$.

V poskusu odgovora na vprašanje (b) si poglejmo nekaj zgledov.

- Naj bo najprej $\mathcal{G}$ σ-algebra generirana z dogodkom $B \in \mathcal{F}$. Tedaj je

$$E[X|\mathcal{G}] = \chi_B \frac{1}{P(B)} \int_B XdP + \chi_{\bar{B}} \frac{1}{P(\bar{B})} \int_{\bar{B}} XdP \text{(s.g.)}.$$

- Zdaj pa naj bo $\mathcal{G}$ σ-algebra generirana s popolnim sistemom dogodkov $B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathcal{F}$. Tedaj je

$$E[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i} \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} XdP \text{(s.g.)}.$$

Lastnosti pogojnega matematičnega upanja

Pri nadaljnjih utemeljitvah intuitivnih razlogov za vpeljavo pogojnega matematičnega upanja, se to preko svojih lastnosti pokaže kot najboljša napoved za slučajno spremenljivko X na podlagi informacije, ki jo vsebuje σ-algebra $\mathcal{G}$. Vse tu navedene enačaje in neenačaje moramo razumeti v smislu s.g. (skoraj gotovo).

(1) *Idempotentnost*: če je X že $\mathcal{G}$-merljiva, potem je $E[X|\mathcal{G}] = X$.
(2) *Univerzalnost*: $E[X|\{\emptyset, \Omega\}] = E\ X$.
(3) *Linearnost:* $E[\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}] = E[\alpha X|\mathcal{G}] + E[\beta Y|\mathcal{G}]$.
(4) $E[E[X|\mathcal{G}]] = E\ X$.
(5) *Monotonost*: če je $X \leq Y$, potem je $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$.
(6) *Trikotniška neenakost*: $|E[X|\mathcal{G}]| \leq E[|X|\ |\mathcal{G}]$.
(7) *Neodvisno pogojevanje*: Če je X neodvisen od $\mathcal{G}$, potem je $E[X|\mathcal{G}] = E\ X$.
(8) *Produktno pravilo*: če velja $X, YX \in L^1$ in je Y $\mathcal{G}$-merljiva, potem je $E[XY|\mathcal{G}] = \mathrm{Y}\, E[X|\mathcal{G}]$.
(9) *Pravilo gladitve*: če je $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$ in $X \in L^1$, potem velja $E[E[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = E[X|\mathcal{G}_1]$ in $E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[X|\mathcal{G}_1]$
(10) *Zveznost po normi*: za vsako L^p normo velja, da je $\|E[X|\mathcal{G}]\|_p \leq \|X\|_p$, zato slika projektor pogojnega matematičnega upanja v poljubni L^p normi konvergentna zaporedja v konvergentna zaporedja.
(11) *Pravilo projektorjev*. Na prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiramo preslikavo $X \mapsto E(X|\mathcal{G})$, ki je ortogonalni projektor na podprostor $\mathcal{G}$-merljivih (razredov) slučajnih spremenljivk. Slika je (skoraj gotovo) enolična slučajna spremenljivka $E[X|\mathcal{G}]$, pri kateri je dosežen $\inf_{Z \in L^2(\mathcal{G})} \|X - Z\|_2$.

(12) *Fatoujeva lema*: če je $0 \leq X_n \in L^1$, potem je $E[\liminf_{n\to\infty} X_n \,|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}]$.

(13) *Izrek o monotoni konvergenci*: če je $0 \leq X_n \uparrow X \in L^1$, potem je $E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}]$.

(14) *Izrek o dominantni konvergenci*: če je $|X_n| \leq Z \in L^1$ in $X_n \to X$ skoraj gotovo, potem je $E[\lim_{n\to\infty} X_n \,|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}]$.

Filtracije in (pol)martingali

- Zaporedje σ-podalgeber $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$ je *filtracija*, če velja $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots$.
- *Slučajni proces* (oziroma na kratko *proces*) je zaporedje slučajnih spremenljivk $X = \{X_i\}_{i=1}^{\infty}$.
- Proces $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je *prilagojen* filtraciji $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$, če je za vsak *i* slučajna spremenljivka X_i $\mathcal{F}_i$-merljiva.
- Vsak proces je prilagojen neki filtraciji. Za proces $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ npr. definiramo
$$\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_i\}_{i=1}^{n}),$$
to je *filtracija, ki jo generira ta proces*.
- Proces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *podmartingal* glede na filtracijo $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$, če velja
  (a) proces je prilagojen filtraciji,
  (b) slučajne spremenljivke X_n so v L^1 za vsak *n*.
  (c) za vsak *n* je skoraj gotovo $\mathrm{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$.
- Proces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *nadmartingal* glede na filtracijo $\mathcal{F}$, če je $-X$ podmartingal.
- Proces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *martingal* glede na filtracijo $\mathcal{F}$, če je hkrati nad- in podmartingal.
- Proces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *predvidljiv* glede na filtracijo $\mathcal{F}$, če je X_n $\mathcal{F}_{n-1}$-merljiv za vsak *n*. Tu $\mathcal{F}_0$ označuje najmanjšo možno σ-algebro.
- Proces *X* je *polmartingal*, če ga lahko zapišemo v obliki $X = Y + Z$, kjer je *Y* martingal in *Z proces z omejeno variacijo*; to pomeni, da je $Z = U - V$, kjer sta $U_1 \leq U_2 \leq \cdots$ in $V_1 \leq V_2 \leq \cdots$ L^1 naraščajoča prilagojena procesa.

4.1. Primer. Naj bodo $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ n.i.p., npr. enakomerno na {1,–1} (model za zelo enostavno igro na srečo). Naj bo $\mathcal{F}$ s tem zaporedjem generirana filtracija in $S_n \coloneqq X_1 + \cdots + X_n$ zaporedje delnih vsot $\Rightarrow \mathrm{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathrm{E}[X_{n+1} + S_n|\mathcal{F}_n] = 0 + S_n$ in S_n je martingal. Ta premislek velja splošneje, brž ko so $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ neodvisne (tudi če niso porazdeljene enako), če so le vse L^1 in imajo povprečje nič. Še en pogled na ta primer: S_n je (simetrični) slučajni sprehod.

4.2. Primer. Naj bo $S = \{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ martingal glede na filtracijo $\mathcal{F}$ in proces $A = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ predvidljiv glede na $\mathcal{F}$. Postavimo $S_0 \coloneqq 0$ in naj bo y_0 neka konstanta. Vpeljimo proces Y s predpisom:

$$Y_n \coloneqq y_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(S_i - S_{i-1}),\ \text{za vsak}\ n \geq 0.$$

Potem je proces Y martingal glede na $\mathcal{F}$. To je *martingalska transformacija* procesa S. Konkretni zgled: v proces S iz primera 4.1 vstavimo novo stavo A.

4.3. Primer. Naj bo $\mathcal{F}$ poljubna filtracija in Y poljubna L^1 slučajna spremenljivka. Potem je $X_n \coloneqq \mathrm{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ martingal glede na to filtracijo. Tako dobljenim martingalom rečemo *Doobovi martingali*.

4.4. Lema. Če je X podmartingal glede na neko filtracijo $\mathcal{F}$, potem je podmartingal tudi glede na filtracijo, ki jo X generira.

4.5. Lema.

- *(a)* Če je X martingal glede na neko filtracijo $\mathcal{F}$ in je ψ konveksna ter so $\psi(X_n)$ v L^1 za vse n, potem je $\psi(X)$ podmartingal glede na isto filtracijo.
- *(b)* Če je X podmartingal glede na neko filtracijo $\mathcal{F}$ in je ψ nepadajoča konveksna ter so $\psi(X_n)$ v L^1 za vse n, potem je $\psi(X)$ podmartingal glede na isto filtracijo.

Za vsak martingal X so torej X^+, $|X|^p$, $p \geq 1$, in e^X podmartingali, če so le v L^1 za vsak n. Za vsak podmartingal X pa sta X^+ in e^X podmartingala, če sta le v L^1 za vsak n. Obstaja pa podmartingal, katerega absolutna vrednost ni podmartingal.

Doobova dekompozicija.

- *(a)* Vsak podmartingal X lahko zapišemo kot vsoto $X = Y + Z$, kjer je Y martingal in Z nenegativen predvidljiv s.g. naraščajoč L^1 proces.
- *(b)* Vsak pod- in vsak nad-martingal je polmartingal.
- *(c)* Vsak polmartingal lahko zapišemo kot razliko pod- in nad-martingala.

Dokaz. Vpeljimo $X_0 \coloneqq 0$ in $D_i \coloneqq X_i - X_{i-1}$ za $i = 1,2,\cdots$, tako da je proces X zaporedje delnih vsot procesa D. Nadalje postavimo $Y_n \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[D_i|\mathcal{F}_{i-1}]$ in $Z = X - Y$.