Statistika 1
Tretje poglavje
Neodvisnost

Matjaž Omladič

November 2011

Vsebina

Produktne σ-algebre

V tem poglavju bomo spoznali korektno definicijo *neodvisnosti slučajnih spremenljivk*. V teoriji mere so podlaga za modeliranje neodvisnosti produktni prostori.

Naj bosta $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ in $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ dva prostora s σ-končno mero. Na produktni množici $\Omega_1 \times \Omega_2$ bomo vpeljali *produktno σ-algebro* $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ in *produktno mero* $\mu_1 \times \mu_2$.

Definicija. Najprej vpeljemo družino *merljivih pravokotnikov* $\mathcal{A}_0 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$, ki je zaprta za končne preseke, nato pa še *algebro množic* $\mathcal{A}$ kot družino vseh končnih unij disjunktnih elementov družine $\mathcal{A}_0$.

Izrek (Produktno merljive množice)

Družina $\mathcal{A}$ je algebra in $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}_0)$.

Dokaz zahteva idejno preprost, le nekoliko tehnično zahteven premislek.

Produktne σ-algebre

V tem poglavju bomo spoznali korektno definicijo *neodvisnosti slučajnih spremenljivk*. V teoriji mere so podlaga za modeliranje neodvisnosti produktni prostori.

Naj bosta $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ in $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ dva prostora s σ-končno mero. Na produktni množici $\Omega_1 \times \Omega_2$ bomo vpeljali *produktno σ-algebro* $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ in *produktno mero* $\mu_1 \times \mu_2$.

Definicija. Najprej vpeljemo družino *merljivih pravokotnikov* $\mathcal{A}_0 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$, ki je zaprta za končne preseke, nato pa še *algebro množic* $\mathcal{A}$ kot družino vseh končnih unij disjunktnih elementov družine $\mathcal{A}_0$.

Izrek (Produktno merljive množice)

Družina $\mathcal{A}$ je algebra in $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}_0)$.

Dokaz zahteva idejno preprost, le nekoliko tehnično zahteven premislek.

Definicija produktne mere

Definicija. Z $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ označimo σ-algebro $\sigma(\mathcal{A})$, njene elemente pa poimenujemo *produktno merljive množice*. Vpeljati želimo še *produktno mero* $\mu_1 \times \mu_2$ na *produktnem merljivem prostoru* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. To mero definiramo najprej na družini množic $\mathcal{A}_0$ s predpisom

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2).$$

Na družino množic $\mathcal{A}$ jo razširimo enolično do končno aditivne mere. Nato pa se moramo nasloniti na izrek Carathéodory. S tem namenom moramo dokazati, da je tako dobljena mera tudi σ-aditivna, oz. števno aditivna, kar je edini res netrivialen del te izpeljave. Pri tem je ključen dokaz t.i. *dezintegracijske formule*, ki velja za poljuben $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$:

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \int_{\Omega_2} \mu_1(E_{\omega_2})\, d\mu_2,$$

kjer je $E_{\omega_2} := \{\omega_1 \,|\, (\omega_1, \omega_2) \in E\}$ nujno merljiva množica.

Definicija produktne mere

Definicija. Z $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ označimo σ-algebro $\sigma(\mathcal{A})$, njene elemente pa poimenujemo *produktno merljive množice*. Vpeljati želimo še *produktno mero* $\mu_1 \times \mu_2$ na *produktnem merljivem prostoru* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$. To mero definiramo najprej na družini množic $\mathcal{A}_0$ s predpisom

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2).$$

Na družino množic $\mathcal{A}$ jo razširimo enolično do končno aditivne mere. Nato pa se moramo nasloniti na izrek Carathéodory. S tem namenom moramo dokazati, da je tako dobljena mera tudi σ-aditivna, oz. števno aditivna, kar je edini res netrivialen del te izpeljave. Pri tem je ključen dokaz t.i. *dezintegracijske formule*, ki velja za poljuben $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$:

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \int_{\Omega_2} \mu_1(E_{\omega_2})\, d\mu_2,$$

kjer je $E_{\omega_2} := \{\omega_1 \,|\, (\omega_1, \omega_2) \in E\}$ nujno merljiva množica.

Obstoj produktne mere

Izrek (o obstoju produktne mere)

Na produktnem merljivem prostoru $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ *obstaja natanko ena mera, ki se na družini* $\mathcal{A}$ *ujema s tako vpeljano mero* $\mu_1 \times \mu_2$.

Mero iz izreka poimenujemo *produktna mera* in jo označimo z $\mu_1 \times \mu_2$. Po matematični indukciji lahko definicijo razširimo na produkt več (končno mnogo) prostorov z mero. Kolmogorov je vpeljal produkt števno mnogo prostorov z mero. Zgornji izrek nam omogoča alternativno vpeljavo *n*-razsežne Lebesguove mere iz enorazsežne.

Izrek (o obstoju večrazsežne Lebesguove mere)

n-razsežna Lebesguova mera je n-kratni produkt enorazsežne Lebesguove mere same s seboj.

Obstoj produktne mere

Izrek (o obstoju produktne mere)

Na produktnem merljivem prostoru $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ *obstaja natanko ena mera, ki se na družini* $\mathcal{A}$ *ujema s tako vpeljano mero* $\mu_1 \times \mu_2$.

Mero iz izreka poimenujemo *produktna mera* in jo označimo z $\mu_1 \times \mu_2$. Po matematični indukciji lahko definicijo razširimo na produkt več (končno mnogo) prostorov z mero. Kolmogorov je vpeljal produkt števno mnogo prostorov z mero. Zgornji izrek nam omogoča alternativno vpeljavo *n*-razsežne Lebesguove mere iz enorazsežne.

Izrek (o obstoju večrazsežne Lebesguove mere)

n-razsežna Lebesguova mera je n-kratni produkt enorazsežne Lebesguove mere same s seboj.

Fubinijev izrek

Izrek (Fubini-Tonelli)

Naj bo $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$-merljiva (t.j. produktno merljiva). Tedaj je $\omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ $\mathcal{F}_2$-merljiva za vsak $\omega_1 \in \Omega_1$ in $\omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ $\mathcal{F}_1$-merljiva za vsak $\omega_2 \in \Omega_2$. Nadalje velja.

1. *Če je še $f \in L^1(\mu_1 \times \mu_2)$, potem sta funkciji*
$$\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_2 \quad oz. \quad \omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1$$
iz $L^1(\mu_1)$ oz. $L^1(\mu_2)$ ter velja
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f\, d\mu_1 \right) d\mu_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f\, d\mu_2 \right) d\mu_1 .$$
2. *Za nenegativne funkcije f velja ista formula, tudi če f ni v $L^1(\mu_1 \times \mu_2)$.*

Ideja dokaza Fubinijevega izreka

Ideja dokaza. Dezintegracijska formula pove, da je zadnja enakost veljavna za indikatorske funkcije. Po linearnosti velja zato za enostavne funkcije, nato po limitnih izrekih za omejene merljive, pa za pozitivne in končno za integrabilne.

Fubinijev izrek nam pove zadostne pogoje za to, da smemo v dvakratnem integralu zamenjati vrstni red integriranja. Pri nenegativnih funkcijah smemo to vselej storiti. Rezultat bo bodisi po obeh vrstnih redih integriranja končen bodisi po obeh neskončen. Kadar pa funkcija ni nenegativna, izračunamo katerega od dvakratnih integralov njene absolutne vrednosti. Če je eden od njiju končen (in sta zato končna oba), potem smemo vrstni red integriranja prvotne funkcije zamenjati, sicer pa v splošnem ne.

Ideja dokaza Fubinijevega izreka

Ideja dokaza. Dezintegracijska formula pove, da je zadnja enakost veljavna za indikatorske funkcije. Po linearnosti velja zato za enostavne funkcije, nato po limitnih izrekih za omejene merljive, pa za pozitivne in končno za integrabilne.

Fubinijev izrek nam pove zadostne pogoje za to, da smemo v dvakratnem integralu zamenjati vrstni red integriranja. Pri nenegativnih funkcijah smemo to vselej storiti. Rezultat bo bodisi po obeh vrstnih redih integriranja končen bodisi po obeh neskončen. Kadar pa funkcija ni nenegativna, izračunamo katerega od dvakratnih integralov njene absolutne vrednosti. Če je eden od njiju končen (in sta zato končna oba), potem smemo vrstni red integriranja prvotne funkcije zamenjati, sicer pa v splošnem ne.

Porazdelitvena funkcija

Definicija. *Porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X je preslikava $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, podana s predpisom $F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

Izrek

Realna funkcija F je porazdelitvena funkcija neke slučajne spremenljivke natanko tedaj, kadar ima naslednje lastnosti.

1. *Funkcija F je nepadajoča.*
2. *Funkcija F je v vsaki realni točki z desne zvezna in ima leve limite.*
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
4. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Ideja dokaza. Znano nam je, da ima porazdelitvena funkcija zgornje lastnosti. Pa denimo, obratno, da imamo funkcijo F s temi lastnostmi. Vpeljimo $\Omega = [0,1]$ in $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$. Verjetnost P pa naj bo Lebesguova mera na $(\Omega, \mathcal{F})$.

Porazdelitveni zakon

Za $\omega \in [0,1]$ postavimo $X(\omega) := \inf\{x \mid F(x) \geqslant \omega\}$. Ker je funkcija X monotona, je nujno merljiva in zato slučajna spremenljivka. Poleg tega velja $F_X(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = F(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Spomnimo se še *porazdelitvenega zakona* P_X, verjetnostne mere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, podane s predpisom $P_X(B) = \mathrm{P}(X \in B)$ za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Izrek

1. *Za $x \in \mathbb{R}$ je $\mathrm{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$ in $\mathrm{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$.*
2. *Porazdelitvena funkcija F_X slučajne spremenljivke X je natanko določena z njenim porazdelitvenim zakonom P_X s predpisom $F_X(x) = P_X(\,(-\infty, x]\,), x \in \mathbb{R}$.*
3. *Porazdelitveni zakon P_X slučajne spremenljivke X je natanko določen z njeno porazdelitveno funkcijo F_X s predpisom $P_X(\,(a,b]\,) = F(b) - F(a), a, b \in \mathbb{R}, a < b$, ki ima kot mera enolično razširitev na vse Borelove množice.*

Porazdelitveni zakon

Za $\omega \in [0,1]$ postavimo $X(\omega) := \inf\{x \mid F(x) \geqslant \omega\}$. Ker je funkcija X monotona, je nujno merljiva in zato slučajna spremenljivka. Poleg tega velja $F_X(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = F(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Spomnimo se še *porazdelitvenega zakona* P_X, verjetnostne mere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, podane s predpisom $P_X(B) = \mathrm{P}(X \in B)$ za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Izrek

1. *Za* $x \in \mathbb{R}$ *je* $\mathrm{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$ *in* $\mathrm{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$.
2. *Porazdelitvena funkcija* F_X *slučajne spremenljivke* X *je natanko določena z njenim porazdelitvenim zakonom* P_X *s predpisom* $F_X(x) = P_X(\,(-\infty, x]\,), x \in \mathbb{R}$.
3. *Porazdelitveni zakon* P_X *slučajne spremenljivke* X *je natanko določen z njeno porazdelitveno funkcijo* F_X *s predpisom* $P_X(\,(a,b]\,) = F(b) - F(a), a, b \in \mathbb{R}, a < b$*, ki ima kot mera enolično razširitev na vse Borelove množice.*

Slučajni vektor

Poglejmo si podrobneje le *dvorazsežne slučajne vektorje*. Tako pravimo preslikavam oblike $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, za katere je $\{\omega \in \Omega \,|\, (X, Y)(\omega) \in B\} =: \{(X, Y) \in B\} \in \mathcal{F}$, tj. dogodek, za vsako $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Definicija. *Porazdelitvena funkcija $F_{(X,Y)}$ slučajnega vektorja* (X, Y) je funkcija dveh spremenljivk, podana s predpisom $F_{(X,Y)}(x, y) = \mathrm{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y), x, y \in \mathbb{R}$. *Porazdelitveni zakon $P_{(X,Y)}$ slučajnega vektorja* (X, Y) je verjetnostna mera na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, podana s predpisom $P_{(X,Y)}(B) = \mathrm{P}((X, Y) \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Podobno kot v primeru slučajne spremenljivke ugotovimo, da sta podatka o slučajni spremenljivki "porazdelitveni zakon" in "porazdelitvena funkcija" med seboj ekvivalentna. *Robna zakona* dobimo po formulah $P_X(B) = P_{(X,Y)}(B \times \mathbb{R})$ in $P_Y(B) = P_{(X,Y)}(\mathbb{R} \times B)$, *robni porazdelitveni funkciji* pa po formulah $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x, y)$ in $F_Y(x) = \lim_{x\to\infty} F_{(X,Y)}(x, y)$.

Slučajni vektor

Poglejmo si podrobneje le *dvorazsežne slučajne vektorje*. Tako pravimo preslikavam oblike $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, za katere je $\{\omega \in \Omega \,|\, (X, Y)(\omega) \in B\} =: \{(X, Y) \in B\} \in \mathcal{F}$, tj. dogodek, za vsako $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Definicija. *Porazdelitvena funkcija* $F_{(X,Y)}$ *slučajnega vektorja* (X, Y) je funkcija dveh spremenljivk, podana s predpisom $F_{(X,Y)}(x, y) = \mathrm{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y), x, y \in \mathbb{R}$. *Porazdelitveni zakon* $P_{(X,Y)}$ *slučajnega vektorja* (X, Y) je verjetnostna mera na $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, podana s predpisom $P_{(X,Y)}(B) = \mathrm{P}((X, Y) \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Podobno kot v primeru slučajne spremenljivke ugotovimo, da sta podatka o slučajni spremenljivki "porazdelitveni zakon" in "porazdelitvena funkcija" med seboj ekvivalentna. *Robna zakona* dobimo po formulah $P_X(B) = P_{(X,Y)}(B \times \mathbb{R})$ in $P_Y(B) = P_{(X,Y)}(\mathbb{R} \times B)$, *robni porazdelitveni funkciji* pa po formulah $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x, y)$ in $F_Y(x) = \lim_{x\to\infty} F_{(X,Y)}(x, y)$.

Neodvisnost slučajnih spremenljivk – 1

Za slučajni spremenljivki X in Y pravimo, da sta *neodvisni*, če za poljubni $B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ velja, da sta dogodka $\{X \in B\}$ in $\{Y \in C\}$ neodvisna: $\mathrm{P}(X \in B, Y \in C) = \mathrm{P}(X \in B)\mathrm{P}(Y \in C)$.

Izrek (Neodvisnost – 1)

1. *Spremenljivki X in Y sta neodvisni natanko tedaj, kadar velja $P_{(X,Y)} = P_X \times P_Y$.*
2. *Spremenljivki X in Y sta neodvisni natanko tedaj, kadar za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.*
3. *Diskretni slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni natanko tedaj, kadar za poljubna realna x in y velja, da sta dogodka $\{X = x\}$ in $\{Y = y\}$ neodvisna.*
4. *Diskretni slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni natanko tedaj, kadar obstajata taki zaporedji a_j oz. b_k na zalogah vrednosti X oz. Y, da velja $f_{jk}^{(X,Y)} = a_j b_k$, kjer je f skupna verjetnostna funkcija slučajnega vektorja (X, Y).*

Neodvisnost slučajnih spremenljivk — 2

Izrek (Neodvisnost — 2)

5. *Diskretni slučajni spremenljivki X in Y s skupno verjetnostno funkcijo $f^{(X,Y)}$ in robnima verjetnostnima funkcijama f^X, f^Y sta neodvisni natanko tedaj, kadar velja $f_{jk}^{(X,Y)} = f_j^X f_k^Y$.*
6. *Zvezni slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni natanko tedaj, kadar obstajata taki realni funkciji g in h, da za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja $f_{(X,Y)}(x,y) = g(x)h(y)$, kjer je $f_{(X,Y)}$ skupna gostota porazdelitve vektorja (X,Y).*
7. *Zvezni slučajni spremenljivki X in Y s skupno gostoto porazdelitve $f_{(X,Y)}$ in marginalnima gostotama f_X, f_Y sta neodvisni natanko tedaj, kadar za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$.*

Neodvisnost slučajnih spremenljivk — 3

Izrek (Neodvisnost — 3)

8. *Če sta slučajni spremenljivki neodvisni, sta tudi poljubni njuni funkciji neodvisni.*
9. *Če sta slučajni spremenljivki neodvisni in iz L^1, potem je tudi njun produkt XY iz L^1 in velja $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$.*

Dokaz je preprost. Morda je nekoliko bolj zanimiv le dokaz točk 4 in 6. Iz pogoja v točki 4, $f_{jk} = a_j b_k$, najprej brez škode za splošnost privzamemo, da sta zaporedji $\{a_j\}_j$ in $\{b_k\}_k$ nenegativni. Nato vpeljemo $\alpha = \sum_j a_j$ in $\beta = \sum_k b_k$ in se takoj prepričamo, da je $\alpha\beta = 1$, kar v posebnem dokazuje, da sta obe vrsti konvergentni. Nadalje izračunamo $f_{.k} = \alpha b_k$ in $f_{j.} = a_j \beta$, tako da je $P(X = x_j, Y = y_k) = f_{jk} = a_j b_k = \dfrac{f_{j.}}{\beta}\dfrac{f_{.k}}{\alpha} = f_{j.} f_{.k} = P(X = x_j)P(Y = y_k)$. Točka 6 gre podobno.

Večrazsežni slučajni vektorji

Najprej povzemimo nekatere standardne tu uporabljene izraze. Za porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja $F_{(X,Y)}$ je v navadi poimenovanje *skupna porazdelitvena funkcija* slučajnih spremenljivk X in Y. Porazdelitveni funkciji vsake od teh spremenljivk pa potem poimenujemo *marginalni porazdelitveni funkciji*. Analogna poimenovanja uporabljamo za porazdelitvene zakone, verjetnostne funkcije in gostote porazdelitev.

Vse, kar smo povedali za dvorazsežne vektorje (X, Y), lahko skoraj dobesedno prepišemo tudi za primer *n-razsežnega slučajnega vektorja* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Vpeljemo lahko n-razsežno porazdelitveno funkcijo $F_{\mathbf{X}}$ in n-razsežni porazdelitveni zakon $P_{\mathbf{X}}$. Gre spet za ekvivalentna podatka o tem slučajnem vektorju. *Neodvisnost* slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \cdots, X_n$ lahko spet spoznamo na vrsto ekvivalentnih načinov, npr. da je $P_{\mathbf{X}} = P_{X_1} \times P_{X_2} \times \cdots \times P_{X_n}$, ali da je $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$.

Večrazsežni slučajni vektorji

Najprej povzemimo nekatere standardne tu uporabljene izraze. Za porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja $F_{(X,Y)}$ je v navadi poimenovanje *skupna porazdelitvena funkcija* slučajnih spremenljivk X in Y. Porazdelitveni funkciji vsake od teh spremenljivk pa potem poimenujemo *marginalni porazdelitveni funkciji*. Analogna poimenovanja uporabljamo za porazdelitvene zakone, verjetnostne funkcije in gostote porazdelitev.

Vse, kar smo povedali za dvorazsežne vektorje (X, Y), lahko skoraj dobesedno prepišemo tudi za primer *n-razsežnega slučajnega vektorja* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Vpeljemo lahko n-razsežno porazdelitveno funkcijo $F_{\mathbf{X}}$ in n-razsežni porazdelitveni zakon $P_{\mathbf{X}}$. Gre spet za ekvivalentna podatka o tem slučajnem vektorju. *Neodvisnost* slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \cdots, X_n$ lahko spet spoznamo na vrsto ekvivalentnih načinov, npr. da je $P_{\mathbf{X}} = P_{X_1} \times P_{X_2} \times \cdots \times P_{X_n}$, ali da je $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$.

Zakon $0 - 1$ Kolmogorova

V verjetnostnih limitnih izrekih navadno opazujemo zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \cdots$, ki so *neodvisne*, to pomeni, da so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \cdots, X_n$ neodvisne za vsak n. Kadar imajo vse te spremenljivke še isto porazdelitev, govorimo o zaporedju *neodvisnih identično porazdeljenih* spremenljivk, kar krajšamo n.i.p.

Definicija. *Repna σ-algebra $\mathcal{T}$* družine slučajnih spremenljivk $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je definirana kot σ-algebra $\mathcal{T} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\{X_i\}_{i=n}^{\infty})$. Repna σ-algebra se ne spremeni, če iz zaporedja izvzamemo ali mu dodamo končno mnogo slučajnih spremenljivk.

Izrek (Zakon $0 - 1$ Kolmogorova)

Če so slučajne spremenljivke $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ neodvisne, potem so vsi dogodki iz njihove repne σ-algebre $\mathcal{T}$ bodisi skoraj gotovi bodisi skoraj nemogoči. Vsaka $\mathcal{T}$-merljiva slučajna spremenljivka je skoraj gotovo konstanta.

Bernoullijev šibki zakon velikih števil

Zgodovinsko je bil prvi zakon velikih števil *Bernoullijev šibki zakon velikih števil* (1713), ki pravi, da v neodvisnih ponovitvah poskusa, v katerih se lahko primeri slučajni dogodek A z verjetnostjo p, velja, da relativna frekvenca dogodka A konvergira verjetnostno z rastjo števila ponovitev proti verjetnosti p. Opisano zaporedje poskusov imenujemo *Bernoullijevo zaporedje poskusov*, njegov zakon pa je statistična podlaga teorije verjetnosti.

Zapišimo ta zakon s pomočjo zaporedja slučajnih spremenljivk. Z X_i označimo spremenljivko χ_A v i-tem neodvisnem poskusu. Dobimo zaporedje n.i.p. slučajnih spremenljivk $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, ki mu priredimo zaporedje delnih vsot $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Spremenljivke S_n pomenijo zaporedje frekvenc dogodka A v n neodvisnih ponovitvah poskusa, spremenljivke $\frac{S_n}{n}$ pa zaporedje relativnih frekvenc. Spomnimo se še, da je $\mathrm{E}X = p$, kjer je $X \sim X_i$.

Bernoullijev šibki zakon velikih števil

Zgodovinsko je bil prvi zakon velikih števil *Bernoullijev šibki zakon velikih števil* (1713), ki pravi, da v neodvisnih ponovitvah poskusa, v katerih se lahko primeri slučajni dogodek A z verjetnostjo p, velja, da relativna frekvenca dogodka A konvergira verjetnostno z rastjo števila ponovitev proti verjetnosti p. Opisano zaporedje poskusov imenujemo *Bernoullijevo zaporedje poskusov*, njegov zakon pa je statistična podlaga teorije verjetnosti.

Zapišimo ta zakon s pomočjo zaporedja slučajnih spremenljivk. Z X_i označimo spremenljivko χ_A v i-tem neodvisnem poskusu. Dobimo zaporedje n.i.p. slučajnih spremenljivk $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, ki mu priredimo zaporedje delnih vsot $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Spremenljivke S_n pomenijo zaporedje frekvenc dogodka A v n neodvisnih ponovitvah poskusa, spremenljivke $\frac{S_n}{n}$ pa zaporedje relativnih frekvenc. Spomnimo se še, da je $\mathrm{E}X = p$, kjer je $X \sim X_i$.

Šibki zakoni velikih števil

Izrek (Bernoullijev š.z.v.š., 1713)

Če so slučajne spremenljivke $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ n.i.p., vse porazdeljene kot χ_A, kjer je A dogodek z verjetnostjo p, potem za zaporedje delnih vsot S_n velja, da $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}X_1 = p$.

Skozi zgodovino so ta izrek postopoma posploševali. Sčasoma so ugotovili, da lahko za $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ vzamemo dokaj splošne n.i.p. spremenljivke in tvorimo zaporedje delnih vsot

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Izrek (Hinčinov š.z.v.š., 1929)

Če so slučajne spremenljivke $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ n.i.p., vse v L^1, potem za zaporedje delnih vsot S_n velja, da $\frac{S_n}{n}$ konvergira v normi prostora L^1 proti $\mathrm{E}X_1$ in zato tudi $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}X_1$.

Šibki zakoni velikih števil

Izrek (Bernoullijev š.z.v.š., 1713)

Če so slučajne spremenljivke $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *n.i.p., vse porazdeljene kot* χ_A*, kjer je* A *dogodek z verjetnostjo* p*, potem za zaporedje delnih vsot* S_n *velja, da* $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}X_1 = p$*.*

Skozi zgodovino so ta izrek postopoma posploševali. Sčasoma so ugotovili, da lahko za $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ vzamemo dokaj splošne n.i.p. spremenljivke in tvorimo zaporedje delnih vsot

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Izrek (Hinčinov š.z.v.š., 1929)

Če so slučajne spremenljivke $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *n.i.p., vse v* L^1*, potem za zaporedje delnih vsot* S_n *velja, da* $\frac{S_n}{n}$ *konvergira v normi prostora* L^1 *proti* $\mathrm{E}X_1$ *in zato tudi* $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}X_1$*.*

Hinčinov šibki zakon velikih števil

Korak 1 dokaza. Najprej dokažimo konvergenco pod dodatno predpostavko, da so $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ v L^2: $\|S_n/n - \mathrm{E}X\|_2 = \sigma[S_n/n] = \sigma[X]/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Iz konvergence v L^2 sledi konvergenca v L^1.

Korak 2 dokaza. Da bi lahko omilili predpostavko, uporabimo *metodo odsekov Markova*. Naj bo M neko dovolj veliko pozitivno število in vpeljimo $X_i^M := X_i \chi_{\{|X_i| \leqslant M\}}$ ter $S_n^M = X_1^M + X_2^M + \cdots + X_n^M$. Po trikotniški neenakosti dobimo $\|S_n - S_n^M\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^n \mathrm{E}[|X_i|; |X_i| > M] = n\mathrm{E}[|X_1|; |X_1| > M]$. Velja tudi $|\mathrm{E}X_1 - \mathrm{E}X_1^M| \leqslant \mathrm{E}[|X_1|; |X_1| > M]$, zato je $\|S_n/n - \mathrm{E}X_1\|_1 \leqslant 2\mathrm{E}[|X_1|; |X_1| > M] + \|S_n^M/n - \mathrm{E}X_1^M\|_1$. Po koraku 1 konvergira slednji člen proti 0. Zato je $\limsup_{n\to\infty} \|S_n/n - \mathrm{E}X_1\|_1 \leqslant 2\mathrm{E}[|X_1|; |X_1| > M]$, neodvisno od nivoja odsekov M. Ko pošljemo M v neskončnost in uporabimo izrek o dominantni konvergenci, dobimo želeni rezultat.

Hinčinov šibki zakon velikih števil

Korak 1 dokaza. Najprej dokažimo konvergenco pod dodatno predpostavko, da so $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ v L^2:
$\|S_n/n - \mathrm{E}X\|_2 = \sigma[S_n/n] = \sigma[X]/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Iz konvergence v L^2 sledi konvergenca v L^1.

Korak 2 dokaza. Da bi lahko omilili predpostavko, uporabimo *metodo odsekov Markova*. Naj bo M neko dovolj veliko pozitivno število in vpeljimo $X_i^M := X_i \chi_{\{|X_i| \leqslant M\}}$ ter $S_n^M = X_1^M + X_2^M + \cdots + X_n^M$. Po trikotniški neenakosti dobimo $\|S_n - S_n^M\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^n \mathrm{E}[|X_i|; |X_i| > M] = n\mathrm{E}[|X_1|; |X_1| > M]$. Velja tudi $|\mathrm{E}X_1 - \mathrm{E}X_1^M| \leqslant \mathrm{E}[|X_1|; |X_1| > M]$, zato je $\|S_n/n - \mathrm{E}X_1\|_1 \leqslant 2\mathrm{E}[|X_1|; |X_1| > M] + \|S_n^M/n - \mathrm{E}X_1^M\|_1$. Po koraku 1 konvergira slednji člen proti 0. Zato je $\limsup_{n\to\infty} \|S_n/n - \mathrm{E}X_1\|_1 \leqslant 2\mathrm{E}[|X_1|; |X_1| > M]$, neodvisno od nivoja odsekov M. Ko pošljemo M v neskončnost in uporabimo izrek o dominantni konvergenci, dobimo želeni rezultat.

Krepki zakon velikih števil Kolmogorova

Spet naj bodo $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ n.i.p. slučajne spremenljivke in $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ zaporedje delnih vsot.

Izrek (Kolomogorov, k.z.v.š., 1933)

Če so slučajne spremenljivke $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ n.i.p. in vse v L^1, potem konvergira $\frac{S_n}{n}$ skoraj gotovo proti $\mathrm{E}X_1$, tj. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{s.g.}} \mathrm{E}X_1$. In obratno, če je vsaj s pozitivno verjetnostjo $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{S_n}{n}\right| < \infty$, potem so n.i.p. slučajne spremenljivke $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ v L^1.

Dokaz idejno spominja na dokaz Hinčinovega izreka, je pa mnogo bolj zahteven in uporablja še nekaj dodatnih pomožnih rezultatov. Poleg dveh spodaj navedenih trditev uporablja tudi znameniti "sendvični trik". Vse skupaj presega vsebinski domet tega predmeta, zato navedimo le nekaj idej.

Zakon $0-1$ Borel-Cantelli

Izrek (Zakon $0-1$ Borel-Cantelli)

Naj bo $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje dogodkov.

1. *Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$ konvergentna, potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$ skoraj gotovo konvergentna.*
2. *Če pa so dogodki $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ paroma neodvisni in je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$ divergentna, potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$ skoraj gotovo divergentna.*

Dogodek, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$ divergentna, je repni dogodek, da se zgodijo dogodki iz zaporedja dogodkov $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ poljubno mnogokrat. Drugi rezultat je *neenačba Kolmogorova*: za poljubne paroma neodvisne L^2 slučajne spremenljivke $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ in poljuben $\lambda > 0$ ter $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ velja $\mathrm{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k - \mathrm{E}S_k| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{D(S_n)}{\lambda^2}$. Iz šibkejše neenačbe Čebiševa sledi mnogo manj $\mathrm{P}(|S_n - \mathrm{E}S_n| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{D(S_n)}{\lambda^2}$.

Konvergenca po zakonu

Najpomembnejši izmed limitnih izrekov je t.i. *centralni limitni izrek*. Najprej vpeljemo še eno konvergenco, ki je šibkejša od vseh prejšnjih. Tokrat imejmo zaporedje porazdelitvenih funkcij $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ in pripadajoče zaporedje porazdelitvenih zakonov $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$, oboje na merljivem prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. To pomeni, da za vsak indeks i pripada porazdelitveni zakon P_i porazdelitveni funkciji F_i (in obratno), oba pa pripadata neki slučajni spremenljivki X_i. Za realne Borelove mere vpeljemo:

Definicija. Pravimo, da zaporedje mer $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ *konvergira šibko* proti neki meri μ in pišemo $\mu_i \Rightarrow \mu$, če velja $\lim_{i\to\infty} \int f\, d\mu_i = \int f\, d\mu$ za vsako omejeno zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Naj bo $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje slučajnih spremenljivk, $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje njihovih porazdelitvenih zakonov in P porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke X. Če $P_i \Rightarrow P$, rečemo, da $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *konvergira šibko* oz. *po zakonu* proti slučajni spremenljivki X in pišemo $X_i \Rightarrow X$ ali tudi $F_i \Rightarrow F$.

De Moivre-Laplacov centralni limitni izrek

Izrek (Lévy, 1937)

Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *konvergira po zakonu proti slučajni spremenljivki* X *natanko tedaj, kadar velja* $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ *za vse tiste realne* x*, pri katerih je limitna porazdelitvena funkcija* F *zvezna.*

Drugače povedano: $X_n \Rightarrow X$ natanko tedaj, ko $\mathrm{P}(X_n \leqslant x) \to \mathrm{P}(X \leqslant x)$, ko $n \to \infty$, za vse tiste realne x, za katere je $P(X = x) = 0$.

Izrek (De Moivre-Laplace, 1733, 1812)

Naj bo $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *Bernoullijevo zaporedje slučajnih spremenljivk (to pomeni, da so n.i.p. kot* χ_A*, kjer je* A *dogodek z verjetnostjo* p*) in tvorimo* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$*. Tedaj zaporedje slučajnih spremenljivk* $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ *konvergira po zakonu proti standardni normalni porazdelitvi.*

Karakteristična funkcija

Standardna normalna porazdelitvev je absolutno zvezna, zato v tem primeru za poljubna realna $a < b$ velja, da je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(a < Z_n \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$, kjer je Φ porazdelitvena funkcija standardne normalne porazdelitve.

Definicija. Poljubni verjetnostni meri μ na $\mathbb{R}$ priredimo njeno *karakteristično funkcijo*

$$\widehat{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(tx) + i\sin(tx))\, d\mu(x), t \in \mathbb{R},$$

kjer je i imaginarna enota. Dobimo funkcijo, ki je definirana za vsako realno število t in ima vrednosti v kompleksnih številih $\mathbb{C}$, torej $\widehat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Če je X slučajna spremenljivka, uporabimo to definicijo na njenem porazdelitvenem zakonu P_X, dobljeno funkcijo pa označimo s φ_X in ji rečemo *karakteristična funkcija slučajne spremenljivke* X.

Karakteristična funkcija

Standardna normalna porazdelitev je absolutno zvezna, zato v tem primeru za poljubna realna $a < b$ velja, da je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(a < Z_n \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$, kjer je Φ porazdelitvena funkcija standardne normalne porazdelitve.

Definicija. Poljubni verjetnostni meri μ na $\mathbb{R}$ priredimo njeno *karakteristično funkcijo*

$$\widehat{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(tx) + i \sin(tx))\, d\mu(x), t \in \mathbb{R},$$

kjer je i imaginarna enota. Dobimo funkcijo, ki je definirana za vsako realno število t in ima vrednosti v kompleksnih številih $\mathbb{C}$, torej $\widehat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Če je X slučajna spremenljivka, uporabimo to definicijo na njenem porazdelitvenem zakonu P_X, dobljeno funkcijo pa označimo s φ_X in ji rečemo *karakteristična funkcija slučajne spremenljivke* X.

Lastnosti karakteristične funkcije

Velja torej $\varphi_X(t) = \mathrm{E}[\cos tX] + i\mathrm{E}[\sin tX]$, kjer obe matematični upanji očitno obstajata. Tudi tu velja $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX}$. Karakteristična funkcija ima podobno vlogo kot momentno rodovna funkcija.

Izrek (Lastnosti karakteristične funkcije)

1. *Karakteristična funkcija obstaja pri vsakem realnem t, je omejena po absolutni vrednosti z 1 in velja $\varphi_X(0) = 1$.*
2. *Karakteristična funkcija je enakomerno zvezna na vsem $\mathbb{R}$.*
3. *Karakteristična funkcija je pozitivno semidefinitna, to pomeni, da za poljubne realne $t_1, t_2, \ldots, t_n$, in kompleksne $z_1, z_2, \ldots, z_n$, velja*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_X(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} \geqslant 0.$$

Lastnosti karakteristične funkcije

Velja torej $\varphi_X(t) = \mathrm{E}[\cos tX] + i\mathrm{E}[\sin tX]$, kjer obe matematični upanji očitno obstajata. Tudi tu velja $\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX}$. Karakteristična funkcija ima podobno vlogo kot momentno rodovna funkcija.

Izrek (Lastnosti karakteristične funkcije)

1. *Karakteristična funkcija obstaja pri vsakem realnem t, je omejena po absolutni vrednosti z 1 in velja $\varphi_X(0) = 1$.*
2. *Karakteristična funkcija je enakomerno zvezna na vsem $\mathbb{R}$.*
3. *Karakteristična funkcija je pozitivno semidefinitna, to pomeni, da za poljubne realne $t_1, t_2, \ldots, t_n$, in kompleksne $z_1, z_2, \ldots, z_n$, velja*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_X(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} \geqslant 0.$$

Nadaljnje lastnosti karakteristične funkcije

Naloge. Izračunaj karakteristične funkcije enakomerne zvezne, eksponentne in normalne porazdelitve. Izračunaj karakteristične funkcije enakomerne diskretne, binomske in Poissonove porazdelitve.

Prvi odvod. Naj bo $X \in L^1$ slučajna spremenljivka. Izračunajmo prvi odvod njene karakteristične funkcije v točki $t = 0$. Če bi smeli "odvajati pod integralskim znakom", bi dobili $\varphi'(0) = i\mathrm{E}X$. Izkaže se, da to res smemo, dokažemo pa s pomočjo izreka o dominantni konvergenci. Odvajamo lahko tudi večkrat.

Izračun momentov iz karakteristične funkcije. Če je slučajna spremenljivka $X \in L^n$, potem obstaja n-ti moment te slučajne spremenljivke in velja

$$\mathrm{E}X^n = (-i)^n \varphi^{(n)}(0).$$

Nadaljnje lastnosti karakteristične funkcije

Naloge. Izračunaj karakteristične funkcije enakomerne zvezne, eksponentne in normalne porazdelitve. Izračunaj karakteristične funkcije enakomerne diskretne, binomske in Poissonove porazdelitve.

Prvi odvod. Naj bo $X \in L^1$ slučajna spremenljivka. Izračunajmo prvi odvod njene karakteristične funkcije v točki $t = 0$. Če bi smeli "odvajati pod integralskim znakom", bi dobili $\varphi'(0) = i\mathrm{E}X$. Izkaže se, da to res smemo, dokažemo pa s pomočjo izreka o dominantni konvergenci. Odvajamo lahko tudi večkrat.

Izračun momentov iz karakteristične funkcije. Če je slučajna spremenljivka $X \in L^n$, potem obstaja n-ti moment te slučajne spremenljivke in velja

$$\mathrm{E}X^n = (-i)^n \varphi^{(n)}(0).$$

Obratna formula

Izrek (Obratna formula)

Naj bo φ karakteristična funkcija slučajne spremenljivke X, F pa njena porazdelitvena funkcija. Tedaj pri poljubnih realnih $a < b$ velja

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt = \widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a),$$

kjer je $\widetilde{F}(x) = \frac{1}{2}(F(x+) + F(x-))$.

Obratna formula nam pove, kako izračunamo porazdelitveno funkcijo (in od tod tudi porazdelitveni zakon) slučajne spremenljivke X iz njene karakteristične funkcije.

Izrek o enoličnosti

Od tod razberemo, da je porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke X z njeno karakteristično funkcijo enolično določen. Po tem dejstvu je karakteristična funkcija dobila tudi svoje ime, saj karakterizira porazdelitev, iz katere je dobljena.

Izrek (o enoličnosti)

Za dani dve slučajni spremenljivki so ekvivalentne trditve:

1. *imata isto porazdelitveno funkcijo,*
2. *imata isti porazdelitveni zakon,*
3. *imata isto karakteristično funkcijo.*

Izrek o zveznosti

Izrek (o zveznosti)

Za zaporedje porazdelitvenih funkcij $F_1, F_2, \ldots$ in pripadajoče zaporedje karakterističnih funkcij $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ veljata naslednji trditvi

1. *Če konvergira $F_n \Rightarrow F$, kjer je F neka porazdelitvena funkcija in φ njena karakteristična funkcija, potem za vsak realen t konvergira zaporedje kompleksnih števil $\varphi_n(t)$ proti kompleksnemu številu $\varphi(t)$.*
2. *Če konvergira za vsak realen t zaporedje kompleksnih števil $\varphi_n(t)$ proti kompleksnemu številu $\varphi(t)$ in je funkcija $t \mapsto \varphi(t)$ zvezna na nekem odprtem intervalu, ki vsebuje točko 0, potem obstaja porazdelitvena funkcija F, katere karakteristična funkcija je φ, in velja $F_n \Rightarrow F$.*

Centralni limitni izrek

Izrek (Centralni limitni izrek za primer n.i.p.)

Naj bo $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje n.i.p. slučajnih spremenljivk iz L^2 s pozitivno disperzijo in $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ zaporedje njihovih delnih vsot. Tedaj velja

$$\frac{S_n - n\mathrm{E}X}{\sigma X \sqrt{n}} \Rightarrow N(0,1).$$

Včasih ime tega izreka krajšamo s CLI. Temu izreku rečemo tudi *osnovni izrek matematične statistike*.

Obstaja še nekoliko splošnejši Lindeberg-Fellerjev centralni limitni izrek.

Centralni limitni izrek

Izrek (Centralni limitni izrek za primer n.i.p.)

Naj bo $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *zaporedje n.i.p. slučajnih spremenljivk iz* L^2 *s pozitivno disperzijo in* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *zaporedje njihovih delnih vsot. Tedaj velja*

$$\frac{S_n - n\mathrm{E}X}{\sigma X\sqrt{n}} \Rightarrow N(0,1).$$

Včasih ime tega izreka krajšamo s CLI. Temu izreku rečemo tudi *osnovni izrek matematične statistike*.

Obstaja še nekoliko splošnejši Lindeberg-Fellerjev centralni limitni izrek.