Statistika 1
Prvo poglavje
Osnove teorije mere

Matjaž Omladič

Oktober 2011

Vsebina

Algebra in σ-algebra

Naj bo slučajna spremenljivka X porazdeljena enakomerno zvezno na intervalu $[0,1]$. Za katere podmnožice $B \subseteq [0,1]$ obstaja verjetnost dogodka $\{X \in B\}$? Kdaj je torej to dogodek? Matematično natančen odgovor je: "To so Borelove množice, verjetnost, ki pri tem nastopa, je Lebesguova mera." Odgovori so posledica matematično netrivialne teorije, ki jo bomo v uvodu v ta predmet poskusili predstaviti na čim bolj preprost način.

Definicija. Družina podmnožic $\mathcal{F}$ neprazne množice Ω je *σ-algebra*, če velja

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F}$ je zaprta za komplementiranje,
3. $\mathcal{F}$ je zaprta za števne unije.

Če v točki 3 definicije zahtevamo le zaprtost za končne unije, potem pravimo, da je $\mathcal{F}$ "samo" *algebra* množic.

Algebra in σ-algebra

Naj bo slučajna spremenljivka X porazdeljena enakomerno zvezno na intervalu $[0, 1]$. Za katere podmnožice $B \subseteq [0, 1]$ obstaja verjetnost dogodka $\{X \in B\}$? Kdaj je torej to dogodek? Matematično natančen odgovor je: "To so Borelove množice, verjetnost, ki pri tem nastopa, je Lebesguova mera." Odgovori so posledica matematično netrivialne teorije, ki jo bomo v uvodu v ta predmet poskusili predstaviti na čim bolj preprost način.

Definicija. Družina podmnožic $\mathcal{F}$ neprazne množice Ω je *σ-algebra*, če velja

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F}$ je zaprta za komplementiranje,
3. $\mathcal{F}$ je zaprta za števne unije.

Če v točki 3 definicije zahtevamo le zaprtost za končne unije, potem pravimo, da je $\mathcal{F}$ "samo" *algebra* množic.

Merljive množice

Definicija. Elementi σ-algebre $\mathcal{F}$ se imenujejo *$\mathcal{F}$-merljive množice*, oziroma množice, *merljive glede na $\mathcal{F}$*; če pa je množica $\mathcal{F}$ jasna iz konteksta, govorimo kar o *merljivih* množicah.

Merljive množice so matematični model *dogodkov*. Algebre množic so zaprte tudi za končne preseke in vsebujejo prazno množico; σ-algebre množic so zaprte tudi za števne preseke in vsebujejo prazno množico. Družina vseh končnih unij podintervalov intervala $[0, 1]$ je primer algebre množic, ki ni σ-algebra.

Merljive množice

Definicija. Elementi σ-algebre $\mathcal{F}$ se imenujejo *$\mathcal{F}$-merljive množice*, oziroma množice, *merljive glede na $\mathcal{F}$*; če pa je množica $\mathcal{F}$ jasna iz konteksta, govorimo kar o *merljivih* množicah.
Merljive množice so matematični model *dogodkov*. Algebre množic so zaprte tudi za končne preseke in vsebujejo prazno množico; σ-algebre množic so zaprte tudi za števne preseke in vsebujejo prazno množico. Družina vseh končnih unij podintervalov intervala $[0, 1]$ je primer algebre množic, ki ni σ-algebra.
Kaj si v verjetnostnem modelu predstavljamo pod pojmi preseki, unije, komplementi?

Merljive množice

Definicija. Elementi σ-algebre $\mathcal{F}$ se imenujejo *$\mathcal{F}$-merljive množice*, oziroma množice, *merljive glede na $\mathcal{F}$*; če pa je množica $\mathcal{F}$ jasna iz konteksta, govorimo kar o *merljivih* množicah.

Merljive množice so matematični model *dogodkov*. Algebre množic so zaprte tudi za končne preseke in vsebujejo prazno množico; σ-algebre množic so zaprte tudi za števne preseke in vsebujejo prazno množico. Družina vseh končnih unij podintervalov intervala $[0, 1]$ je primer algebre množic, ki ni σ-algebra.

Kaj si v verjetnostnem modelu predstavljamo pod pojmi preseki, unije, komplementi?

Presek σ-algeber je σ-algebra

Primer. Družino $\{\Omega, \emptyset\}$ poimenujemo *trivialna σ-algebra* in je najmanjša možna σ-algebra na množici Ω. Največja σ-algebra na množici Ω je njena potenčna množica, označena s $\mathcal{P}(\Omega)$ ali 2^Ω, t.j. družina vseh njenih podmnožic.

Izrek

Naj bo $\mathcal{J}$ neka množica indeksov in naj bo $\mathcal{F}_\alpha$ neka σ-algebra na množici Ω za vsak $\alpha \in \mathcal{J}$. Tedaj je

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{J}} \mathcal{F}_\alpha$$

tudi σ-algebra na množici Ω.

Kot posledico dobimo dejstvo, da za vsako družino $\mathcal{B}$ podmnožic množice Ω obstaja najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{B}$.

Presek σ-algeber je σ-algebra

Primer. Družino $\{\Omega, \emptyset\}$ poimenujemo *trivialna σ-algebra* in je najmanjša možna σ-algebra na množici Ω. Največja σ-algebra na množici Ω je njena potenčna množica, označena s $\mathcal{P}(\Omega)$ ali 2^{Ω}, t.j. družina vseh njenih podmnožic.

Izrek

Naj bo $\mathcal{J}$ neka množica indeksov in naj bo $\mathcal{F}_\alpha$ neka σ-algebra na množici Ω za vsak $\alpha \in \mathcal{J}$. Tedaj je

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{J}} \mathcal{F}_\alpha$$

tudi σ-algebra na množici Ω.

Kot posledico dobimo dejstvo, da za vsako družino $\mathcal{B}$ podmnožic množice Ω obstaja najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{B}$.

σ-algebra generirana z dano družino

Definicija. Če je $\mathcal{A}$ družina podmnožic množice Ω, označimo s $\sigma(\mathcal{A})$ najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje družino $\mathcal{A}$. Pravimo ji tudi *σ-algebra generirana z $\mathcal{A}$*.

Definicija. Če je $\mathcal{T}$ topološki prostor, potem označimo z $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje vse odprte množice. Pravimo ji *Borelova σ-algebra*, njenim elementom pa *Borelove množice*.

Kaj so Borelove množice na realni premici? Kaj so Borelove množice na intervalu $[0, 1]$? V obeh primerih vzamemo σ-algebro generirano z odprtimi intervali. Borelova množica v $\mathbb{R}^n$ je element σ-algebre generirane z vsemi odprtimi n-razsežnimi kroglami.

σ-algebra generirana z dano družino

Definicija. Če je $\mathcal{A}$ družina podmnožic množice Ω, označimo s $\sigma(\mathcal{A})$ najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje družino $\mathcal{A}$. Pravimo ji tudi *σ-algebra generirana z $\mathcal{A}$*.

Definicija. Če je $\mathcal{T}$ topološki prostor, potem označimo z $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje vse odprte množice. Pravimo ji *Borelova σ-algebra*, njenim elementom pa *Borelove množice*.

Kaj so Borelove množice na realni premici? Kaj so Borelove množice na intervalu $[0, 1]$? V obeh primerih vzamemo σ-algebro generirano z odprtimi intervali. Borelova množica v $\mathbb{R}^n$ je element σ-algebre generirane z vsemi odprtimi n-razsežnimi kroglami.

Definicija mere

Definicija. Naj bo $\mathcal{F}$ neka σ-algebra podmnožic množice Ω. Urejenemu paru $(\Omega, \mathcal{F})$ pravimo *merljiv prostor*.

Definicija. Naj bo $\mathcal{F}$ neka σ-algebra podmnožic neprazne množice Ω. Funkciji $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ pravimo *mera* na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, če velja

1. $\mu(\emptyset) = 0$ in
2. za poljubno števno družino $\{A_n\}_n$ paroma disjunktnih merljivih množic velja

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n).$$

Mere so načeloma vselej nenegativne, lahko pa vpeljemo tudi realne (predznačene) mere in kompleksne mere.

Definicija mere

Definicija. Naj bo $\mathcal{F}$ neka σ-algebra podmnožic množice Ω. Urejenemu paru $(\Omega, \mathcal{F})$ pravimo *merljiv prostor*.

Definicija. Naj bo $\mathcal{F}$ neka σ-algebra podmnožic neprazne množice Ω. Funkciji $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ pravimo *mera* na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, če velja

1. $\mu(\emptyset) = 0$ in
2. za poljubno števno družino $\{A_n\}_n$ paroma disjunktnih merljivih množic velja

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n).$$

Mere so načeloma vselej nenegativne, lahko pa vpeljemo tudi realne (predznačene) mere in kompleksne mere.

Števna subaditivnost

Definicija. Naj bo $\mathcal{G}$ poljubna družina podmnožic množice Ω. Za funkcijo $\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ pravimo, da je *števno aditivna* na $\mathcal{G}$, če velja točka 2 iz prejšnje definicije za poljubno števno družino $\{A_n\}_n$ paroma disjunktnih množic iz $\mathcal{G}$, za katere je tudi $\bigcup_n A_n$ v $\mathcal{G}$.

Definicija. Za funkcijo μ pravimo, da je *števno subaditivna*, če za poljubno števno družino $\{A_n\}_n$ množic iz $\mathcal{G}$, za katere je tudi $\bigcup_n A_n$ v $\mathcal{G}$, velja

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \mu(A_n).$$

Definicija. Trojici $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pravimo *prostor z mero*.

Števna subaditivnost

Definicija. Naj bo $\mathcal{G}$ poljubna družina podmnožic množice Ω. Za funkcijo $\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ pravimo, da je *števno aditivna* na $\mathcal{G}$, če velja točka 2 iz prejšnje definicije za poljubno števno družino $\{A_n\}_n$ paroma disjunktnih množic iz $\mathcal{G}$, za katere je tudi $\bigcup_n A_n$ v $\mathcal{G}$.

Definicija. Za funkcijo μ pravimo, da je *števno subaditivna*, če za poljubno števno družino $\{A_n\}_n$ množic iz $\mathcal{G}$, za katere je tudi $\bigcup_n A_n$ v $\mathcal{G}$, velja

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \mu(A_n).$$

Definicija. Trojici $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pravimo *prostor z mero*.

Verjetnostni prostor

Izrek

Vsaka števno aditivna funkcija na algebri množic je tudi števno subaditivna.

Izrek (Monotonost mere)

Naj bosta A in B merljivi množici na prostoru z mero $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Tedaj iz $A \subseteq B$ sledi, da je $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Če je v tem primeru še $\mu(A) < \infty$, potem velja $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Definicija. Prostor z mero $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je *verjetnostni prostor*, če velja $\mu(\Omega) = 1$. V tem primeru pravimo meri *verjetnostna mera* ali na kratko *verjetnost*. Če velja $\mu(\Omega) < \infty$, potem pravimo meri *končna mera*. Za mero oziroma prostor pravimo, da sta *σ-končna*, če je Ω (naraščajoča) števna unija merljivih podmnožic, s končno mero. Verjetnostne mere označujemo raje s črkami $P, Q, \cdots$, namesto s črkami $\mu, \nu, \cdots$.

Verjetnostni prostor

Izrek

Vsaka števno aditivna funkcija na algebri množic je tudi števno subaditivna.

Izrek (Monotonost mere)

Naj bosta A in B merljivi množici na prostoru z mero $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Tedaj iz $A \subseteq B$ sledi, da je $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Če je v tem primeru še $\mu(A) < \infty$, potem velja $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Definicija. Prostor z mero $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je *verjetnostni prostor*, če velja $\mu(\Omega) = 1$. V tem primeru pravimo meri *verjetnostna mera* ali na kratko *verjetnost*. Če velja $\mu(\Omega) < \infty$, potem pravimo meri *končna mera*. Za mero oziroma prostor pravimo, da sta *σ-končna*, če je Ω (naraščajoča) števna unija merljivih podmnožic, s končno mero. Verjetnostne mere označujemo raje s črkami $P, Q, \cdots$, namesto s črkami $\mu, \nu, \cdots$.

Polzveznost mere

Izrek

1. *(Zveznost od spodaj) Za poljubno naraščajoče zaporedje merljivih množic* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ *na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *velja*

$$\mu(A_n) \uparrow \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right), \quad \text{ko } n \to \infty.$$

2. *(Zveznost od zgoraj) Za poljubno padajoče zaporedje merljivih množic* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ *na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$*, za katero obstaja tak n, da je* $\mu(A_n) < \infty$*, velja*

$$\mu(A_n) \downarrow \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right), \quad \text{ko } n \to \infty.$$

Polzveznost mere

Izrek

1. *(Zveznost od spodaj) Za poljubno naraščajoče zaporedje merljivih množic* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ *na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *velja*

$$\mu(A_n) \uparrow \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right), \quad \text{ko } n \to \infty.$$

2. *(Zveznost od zgoraj) Za poljubno padajoče zaporedje merljivih množic* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ *na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$*, za katero obstaja tak* n*, da je* $\mu(A_n) < \infty$*, velja*

$$\mu(A_n) \downarrow \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right), \quad \text{ko } n \to \infty.$$

Preprosti zgledi verjetnostnih prostorov

Na poljubnem merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ lahko vpeljemo mero δ_x, skoncentrirano v poljubni točki $x \in \Omega$, s predpisom $\delta_x(A) := \chi_A(x)$ za poljubno množico $A \in \mathcal{F}$.

Na števno neskončni množici $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ obstajajo taka števila $p_1, p_2, \dots \in [0,1]$, da je $P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$, za vse $A \subseteq \Omega$. Velja tudi obratno. Za vsako nenegativno zaporedje $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, ki se sešteje v 1, obstaja taka verjetnostna mera P na potenčni množici množice Ω, da velja $P(\{\omega_i\}) = p_i$ za vse i.

Preprosti zgledi verjetnostnih prostorov

Na poljubnem merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ lahko vpeljemo mero δ_x, skoncentrirano v poljubni točki $x \in \Omega$, s predpisom $\delta_x(A) := \chi_A(x)$ za poljubno množico $A \in \mathcal{F}$.

Na števno neskončni množici $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ obstajajo taka števila $p_1, p_2, \dots \in [0,1]$, da je $P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$, za vse $A \subseteq \Omega$. Velja tudi obratno. Za vsako nenegativno zaporedje $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, ki se sešteje v 1, obstaja taka verjetnostna mera P na potenčni množici množice Ω, da velja $P(\{\omega_i\}) = p_i$ za vse i.

Dolžina intervala

Enakomerno zvezno porazdelitev bomo dobili z Lebesguovo mero, ki jo označimo z m. Na polodprtih intervalih vpeljemo njeno vrednost kot dolžino intervala, torej za $(a,b] \subseteq (0,1]$ postavimo $m((a,b]) = b - a$.

Nadalje označimo z $\mathcal{A}$ družino vseh končnih unij polodprtih podintervalov intervala $(0,1]$. Za poljubne disjunktne polodprte intervale $I_1, \cdots, I_n \subset (0,1]$ postavimo $m(\bigcup_{i=1}^n I_i) = \sum_{i=1}^n m(I_i)$ in se hitro prepričamo, da je definicija konsistentna, saj velja $m((a,c]) = m((a,b]) + m((b,c])$ za poljubne $0 < a < b < c \leqslant 1$.

Izrek

Dobljena družina $\mathcal{A}$ je algebra množic in tako vpeljana funkcija m je števno aditivna na njej.

Dolžina intervala

Enakomerno zvezno porazdelitev bomo dobili z Lebesguovo mero, ki jo označimo z m. Na polodprtih intervalih vpeljemo njeno vrednost kot dolžino intervala, torej za $(a, b] \subseteq (0, 1]$ postavimo $m((a, b]) = b - a$.
Nadalje označimo z $\mathcal{A}$ družino vseh končnih unij polodprtih podintervalov intervala $(0, 1]$. Za poljubne disjunktne polodprte intervale $I_1, \cdots, I_n \subset (0, 1]$ postavimo $m(\bigcup_{i=1}^n I_i) = \sum_{i=1}^n m(I_i)$ in se hitro prepričamo, da je definicija konsistentna, saj velja $m((a, c]) = m((a, b]) + m((b, c])$ za poljubne $0 < a < b < c \leqslant 1$.

Izrek

Dobljena družina $\mathcal{A}$ je algebra množic in tako vpeljana funkcija m je števno aditivna na njej.

Ideje iz dokaza izreka

Najprej preverimo, da je $\mathcal{A}$ algebra množic. Nato izberemo števno unijo (paroma disjunktnih) množic iz $\mathcal{A}$ in jo razstavimo na unijo ene končne in ene števne unije

$$\mathcal{A} \ni \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \right).$$

Označimo z B_n drugi člen na desni. To je padajoče zaporedje elementov iz $\mathcal{A}$ s produktom $\emptyset$. Dokazati moramo le, da gre $m(B_n)$ proti 0 z rastočim n.

Dokazujemo s protislovjem in se pri tem skličemo na Cantorjev izrek iz Analize 1. Ta pravi, da ima padajoče zaporedje zaprtih nepraznih intervalov vselej neprazen presek. Ker B_n niso ravno zaprti intervali, moramo nekoliko čarati.

Ideja: Denimo, nasprotno od tega, kar želimo dokazati, da obstaja tak pozitiven ϵ, da je $m(B_n) \geqslant \varepsilon$ za vse n.

Ideje iz dokaza izreka

Najprej preverimo, da je $\mathcal{A}$ algebra množic. Nato izberemo števno unijo (paroma disjunktnih) množic iz $\mathcal{A}$ in jo razstavimo na unijo ene končne in ene števne unije

$$\mathcal{A} \ni \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right).$$

Označimo z B_n drugi člen na desni. To je padajoče zaporedje elementov iz $\mathcal{A}$ s produktom $\emptyset$. Dokazati moramo le, da gre $m(B_n)$ proti 0 z rastočim n.
Dokazujemo s protislovjem in se pri tem skličemo na Cantorjev izrek iz Analize 1. Ta pravi, da ima padajoče zaporedje zaprtih nepraznih intervalov vselej neprazen presek. Ker B_n niso ravno zaprti intervali, moramo nekoliko čarati.
Ideja: Denimo, nasprotno od tega, kar želimo dokazati, da obstaja tak pozitiven ϵ, da je $m(B_n) \geqslant \varepsilon$ za vse n.

Carathéodoryjev izrek o razširitvi

Pišimo B_n kot unijo končno mnogo polodprtih intervalov in vpeljemo C_n kot unijo intervalov, ki jih dobimo iz teh tako, da vsakega na levi "čisto malo" zmanjšamo. Pri tem naj bo $m(\bigcup_{j=1}^{n} B_j \setminus C_j) \leqslant \epsilon/2$. Nadalje vpeljemo $D_n = \bigcap_{j=1}^{n} C_j$, da dobimo spet padajoče zaporedje elementov iz $\mathcal{A}$. Dobljeno zaporedje je tako, da je tudi $\overline{D_n} \subseteq B_n$ padajoče zaporedje množic. Kar precej truda je treba vložiti v to, da dokažemo, da so množice D_n neprazne. Po Cantorjevem izreku je zato presek množic $\overline{D_n}$ neprazen, kar je v nasprotju s tem, da je presek množic B_n prazen in je $\overline{D_n} \subseteq B_n$ za vsak n.

Izrek (Carathéodory, 1948)

Naj bo $\mathcal{A}$ algebra množic na Ω in μ števno aditivna funkcija na njej. Tedaj obstaja mera $\widehat{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{A})$ z lastnostjo, da se ujema z μ na vseh množicah iz $\mathcal{A}$. V primeru σ-končnosti je ta razširitev enolično določena in je tudi $\widehat{\mu}$ σ-končna.

Carathéodoryjev izrek o razširitvi

Pišimo B_n kot unijo končno mnogo polodprtih intervalov in vpeljemo C_n kot unijo intervalov, ki jih dobimo iz teh tako, da vsakega na levi "čisto malo" zmanjšamo. Pri tem naj bo $m(\bigcup_{j=1}^n B_j \setminus C_j) \leqslant \epsilon/2$. Nadalje vpeljemo $D_n = \bigcap_{j=1}^n C_j$, da dobimo spet padajoče zaporedje elementov iz $\mathcal{A}$. Dobljeno zaporedje je tako, da je tudi $\overline{D_n} \subseteq B_n$ padajoče zaporedje množic. Kar precej truda je treba vložiti v to, da dokažemo, da so množice D_n neprazne. Po Cantorjevem izreku je zato presek množic $\overline{D_n}$ neprazen, kar je v nasprotju s tem, da je presek množic B_n prazen in je $\overline{D_n} \subseteq B_n$ za vsak n.

Izrek (Carathéodory, 1948)

Naj bo $\mathcal{A}$ algebra množic na Ω in μ števno aditivna funkcija na njej. Tedaj obstaja mera $\widehat{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{A})$ z lastnostjo, da se ujema z μ na vseh množicah iz $\mathcal{A}$. V primeru σ-končnosti je ta razširitev enolično določena in je tudi $\widehat{\mu}$ σ-končna.

Carathéodoryjev izrek o razširitvi - nadaljevanje

S pomočjo tega izreka in leme, lahko razširimo funkcijo m do mere, definirane na σ-algebri vseh Borelovih množic. To je *Lebesguova mera* na $\mathbb{R}$. Lebesguova mera na $\mathbb{R}^d$.

Enakomerna porazdelitev.

Riemannov integral, gostote.

Gaussova porazdelitev.

Monotoni razredi

Dokaz izreka Carathéodory je zahteven in uporablja nekatere čudovite ideje, ki so uporabne tudi sicer. Ves čas bo Ω neka neprazna množica.

Definicija. Družina podmnožic množice Ω se imenuje *monotoni razred*, če je zaprta

1. za števne unije svojih naraščajočih zaporedij in
2. za števne preseke svojih padajočih zaporedij.

Izrek

Presek poljubne družine monotonih razredov je monotoni razred. V posebnem obstaja najmanjši monotoni razred, ki vsebuje dano družino množic $\mathcal{A}$.

Definicija. Najmanjši monotoni razred, ki vsebuje dano družino množic $\mathcal{A}$, označimo z $\mathrm{mr}(\mathcal{A})$ in ga imenujemo *monotoni razred generiran z $\mathcal{A}$*.

Monotoni razredi

Dokaz izreka Carathéodory je zahteven in uporablja nekatere čudovite ideje, ki so uporabne tudi sicer. Ves čas bo Ω neka neprazna množica.

Definicija. Družina podmnožic množice Ω se imenuje *monotoni razred*, če je zaprta

1. za števne unije svojih naraščajočih zaporedij in
2. za števne preseke svojih padajočih zaporedij.

Izrek

Presek poljubne družine monotonih razredov je monotoni razred. V posebnem obstaja najmanjši monotoni razred, ki vsebuje dano družino množic $\mathcal{A}$.

Definicija. Najmanjši monotoni razred, ki vsebuje dano družino množic $\mathcal{A}$, označimo z $\mathrm{mr}(\mathcal{A})$ in ga imenujemo *monotoni razred generiran z* $\mathcal{A}$.

Izrek o monotonih razredih

Izrek (O monotonih razredih)

Vsak monotoni razred, ki vsebuje neko algebro množic $\mathcal{A}$, vsebuje tudi $\sigma(\mathcal{A})$. Drugače povedano, $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Dokaz enoličnosti izreka Carathéodory. Denimo, da obstajata dve razširitvi $\widehat{\mu}$ in $\widetilde{\mu}$, ter vpeljimo

$$\mathcal{C} = \{E \in \sigma(\mathcal{A}) \,|\, \widehat{\mu}(E) = \widetilde{\mu}(E)\}.$$

Hitro lahko preverimo, da je $\mathcal{C}$ monotoni razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$.

Dokaz izreka o monotonih razredih. Jasno je $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Dovolj je torej dokazati inkluzijo v obratno smer. Vpeljimo tri monotone razrede

$$\mathcal{C}_1 := \{E \in \sigma(\mathcal{A}) \,|\, E^c \in \mathrm{mr}(\mathcal{A})\},$$

$$\mathcal{C}_2 := \{E \in \sigma(\mathcal{A}) \,|\, \forall F \in \sigma(\mathcal{A}) : E \cup F \in \mathrm{mr}(\mathcal{A})\},$$

$$\mathcal{C}_3 := \{E \in \sigma(\mathcal{A}) \,|\, \forall F \in \mathcal{A} : E \cup F \in \mathrm{mr}(\mathcal{A})\}.$$

Izrek o monotonih razredih

Izrek (O monotonih razredih)

Vsak monotoni razred, ki vsebuje neko algebro množic $\mathcal{A}$, vsebuje tudi $\sigma(\mathcal{A})$. Drugače povedano, $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Dokaz enoličnosti izreka Carathéodory. Denimo, da obstajata dve razširitvi $\widehat{\mu}$ in $\widetilde{\mu}$, ter vpeljimo

$$\mathcal{C} = \{E \in \sigma(\mathcal{A}) \,|\, \widehat{\mu}(E) = \widetilde{\mu}(E)\}.$$

Hitro lahko preverimo, da je $\mathcal{C}$ monotoni razred, ki vsebuje $\mathcal{A}$.
Dokaz izreka o monotonih razredih. Jasno je $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Dovolj je torej dokazati inkluzijo v obratno smer. Vpeljimo tri monotone razrede

$$\mathcal{C}_1 := \{E \in \sigma(\mathcal{A}) \,|\, E^c \in \mathrm{mr}(\mathcal{A})\},$$

$$\mathcal{C}_2 := \{E \in \sigma(\mathcal{A}) \,|\, \forall F \in \sigma(\mathcal{A}) : E \cup F \in \mathrm{mr}(\mathcal{A})\},$$

$$\mathcal{C}_3 := \{E \in \sigma(\mathcal{A}) \,|\, \forall F \in \mathcal{A} : E \cup F \in \mathrm{mr}(\mathcal{A})\}.$$

Dokaz obstoja mere — 1

Najprej ugotovimo, da $\mathcal{C}_1$ vsebuje $\mathcal{A}$, zato je $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}_1$, torej je $\mathrm{mr}(\mathcal{A})$ zaprt za komplementiranje. Če bi vedeli, da tudi $\mathcal{C}_2$ vsebuje $\mathcal{A}$, bi dobili $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}_2$ in $\mathrm{mr}(\mathcal{A})$ bi bil zaprt tudi za končne unije, kar bi končalo dokaz. Da bi to dokazali, opazimo, da $\mathcal{C}_3$ vsebuje $\mathcal{A}$, zato je $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}_3$. Če pa zdaj v definiciji $\mathcal{C}_3$ zamenjamo vlogi množic E in F, ugotovimo, da velja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_2$.

Ideja dokaza obstoja mere v izreku Carathéodory. Za začetek vpeljemo razširitev $\overline{\mu}$ mere μ na vse podmnožice $E \subseteq \Omega$. Vpeljemo t.i. *Carathéodoryjevo zunanjo mero*:

$$\overline{\mu}(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \,|\, \forall j \geqslant 1 : E_j \in \mathcal{A} \text{ in } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}.$$

Dokaz obstoja mere — 1

Najprej ugotovimo, da $\mathcal{C}_1$ vsebuje $\mathcal{A}$, zato je $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}_1$, torej je $\mathrm{mr}(\mathcal{A})$ zaprt za komplementiranje. Če bi vedeli, da tudi $\mathcal{C}_2$ vsebuje $\mathcal{A}$, bi dobili $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}_2$ in $\mathrm{mr}(\mathcal{A})$ bi bil zaprt tudi za končne unije, kar bi končalo dokaz. Da bi to dokazali, opazimo, da $\mathcal{C}_3$ vsebuje $\mathcal{A}$, zato je $\mathrm{mr}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}_3$. Če pa zdaj v definiciji $\mathcal{C}_3$ zamenjamo vlogi množic E in F, ugotovimo, da velja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_2$.

Ideja dokaza obstoja mere v izreku Carathéodory. Za začetek vpeljemo razširitev $\overline{\mu}$ mere μ na vse podmnožice $E \subseteq \Omega$. Vpeljemo t.i. *Carathéodoryjevo zunanjo mero*:

$$\overline{\mu}(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \,\middle|\, \forall j \geqslant 1 : E_j \in \mathcal{A} \text{ in } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}.$$

Dokaz obstoja mere — 2

Korak 1. *Števna subaditivnost "mere" $\overline{\mu}$.* Izberimo zaporedje poljubnih množic $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$. Vsakega od elementov tega zaporedja pokrijemo s števno unijo elementov iz $\mathcal{A}$, $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{j,n}$ za vse n. Po definiciji zunanje mere je

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{j,n}).$$

Po isti definiciji lahko za vsako pozitivno število ε izberemo tako števno pokritje $\{A_{j,n}\}_j$, da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{j,n}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n} + \overline{\mu}(A_n) \quad \text{za vsak } n.$$

Od tod sledi $\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n)$.

Dokaz obstoja mere — 2

Korak 1. *Števna subaditivnost "mere" $\overline{\mu}$.* Izberimo zaporedje poljubnih množic $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$. Vsakega od elementov tega zaporedja pokrijemo s števno unijo elementov iz $\mathcal{A}$, $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{j,n}$ za vse n. Po definiciji zunanje mere je

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{j,n}).$$

Po isti definiciji lahko za vsako pozitivno število ε izberemo tako števno pokritje $\{A_{j,n}\}_j$, da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{j,n}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n} + \overline{\mu}(A_n) \quad \text{za vsak } n.$$

Od tod sledi $\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n)$.

Dokaz obstoja mere — 3

Korak 2. *Zunanja mera $\overline{\mu}$ je razširitev mere μ.* Jasno je $\overline{\mu}(E) \leqslant \mu(E)$ za vse E iz družine $\mathcal{A}$. V dokaz obratnega neenačaja izberimo pri nekem pozitivnem ε tako števno pokritje elementov iz $\mathcal{A}$, $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, da je

$$\mu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant \varepsilon + \overline{\mu}(E).$$

Korak 3. *Števna aditivnost.* Ko skrčimo zunanjo mero na $\sigma(\mathcal{A})$, postane števno aditivna. Izberimo zaporedje paroma disjunktnih množic $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(\mathcal{A})$. Ob upoštevanju koraka 1 je dovolj dokazati, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n) \leqslant \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

S tem namenom vpeljimo družino

Dokaz obstoja mere — 3

Korak 2. *Zunanja mera $\overline{\mu}$ je razširitev mere μ.* Jasno je $\overline{\mu}(E) \leqslant \mu(E)$ za vse E iz družine $\mathcal{A}$. V dokaz obratnega neenačaja izberimo pri nekem pozitivnem ε tako števno pokritje elementov iz $\mathcal{A}$, $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, da je

$$\mu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant \varepsilon + \overline{\mu}(E).$$

Korak 3. *Števna aditivnost.* Ko skrčimo zunanjo mero na $\sigma(\mathcal{A})$, postane števno aditivna. Izberimo zaporedje paroma disjunktnih množic $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(\mathcal{A})$. Ob upoštevanju koraka 1 je dovolj dokazati, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n) \leqslant \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

S tem namenom vpeljimo družino

Dokaz obstoja mere — 4

$$\mathcal{M} := \{E \subseteq \Omega \,|\, \forall F \in \mathcal{A} : \overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(E \cap F) + \overline{\mu}(E \cap F^c)\}.$$

Ta družina očitno vsebuje $\mathcal{A}$ in ko bomo dokazali, da je monotoni razred, bo vsebovala tudi $\sigma(A)$. Funkcija $\overline{\mu}$ bo zato končno aditivna na $\sigma(A)$, od tod pa bomo dobili

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \overline{\mu}(A_n).$$

Izrek bo sledil, ko bomo poslali N v neskončnost. Da bi dokazali monotonost razreda $\mathcal{M}$, vpeljimo še razred

$$\mathcal{N} := \{E \subseteq \Omega \,|\, \forall F \in \mathcal{A} : \overline{\mu}(E) \geqslant \overline{\mu}(E \cap F) + \overline{\mu}(E \cap F^c)\}.$$

Po koraku 1 je dovolj dokazati, da je $\mathcal{N}$ monotoni razred.

Dokaz obstoja mere — 4

$$\mathcal{M} := \{E \subseteq \Omega \,|\, \forall F \in \mathcal{A} : \overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(E \cap F) + \overline{\mu}(E \cap F^c)\}.$$

Ta družina očitno vsebuje $\mathcal{A}$ in ko bomo dokazali, da je monotoni razred, bo vsebovala tudi $\sigma(A)$. Funkcija $\overline{\mu}$ bo zato končno aditivna na $\sigma(A)$, od tod pa bomo dobili

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \overline{\mu}(A_n).$$

Izrek bo sledil, ko bomo poslali N v neskončnost. Da bi dokazali monotonost razreda $\mathcal{M}$, vpeljimo še razred

$$\mathcal{N} := \{E \subseteq \Omega \,|\, \forall F \in \mathcal{A} : \overline{\mu}(E) \geqslant \overline{\mu}(E \cap F) + \overline{\mu}(E \cap F^c)\}.$$

Po koraku 1 je dovolj dokazati, da je $\mathcal{N}$ monotoni razred.