OSNOVE TEORIJE MNOŽIC

Operacije z množicami

Naj bodo A, B in C množice. Definiramo operaciji

- *razlika* množic: $A\backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^c$,
- *simetrična razlika* ali *vsota* množic: $A \circ B = A + B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

Naj bo $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ družina množic. Definiramo

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad \text{in} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Če je $\limsup A_n = \liminf A_n$, potem obstaja $\lim A_n$ in velja

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Naj bo $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ družina množic (Λ indeksna množica). Po definiciji unije in preseka velja

$$x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff \exists\lambda\in\Lambda : x \in A_\lambda,$$
$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff \forall\lambda\in\Lambda : x \in A_\lambda.$$

Nekatere lastnosti operacij z množicami.

- Asociativnost: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- Idempotentnost: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
- Absorpcija: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.
- **Distributivnost**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  Iz česar lahko izpeljemo
  $$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B) \quad \text{in} \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B).$$
- Monotonost: $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$ in $A \cap C \subseteq B \cap C$.
- $A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A \iff A\backslash B = \emptyset$
- $A \cap B \subseteq A, B$
  $A, B \subseteq A \cup B$

Naj bo S poljubna množica (*univerzalna množica* ali *svet*) in $A, B \subseteq S$. *Komplement množice* A definiramo kot $A^c = S\backslash A$. Veljajo naslednje lastnosti.

- $A \cup A^c = S$, $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup S = S$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap S = A$
- $(A^c)^c = A$
- $B = A^c \iff A \cup B = S$ in $A \cap B = \emptyset$
- $A \subseteq B \Longrightarrow B^c \subseteq A^c$

- **de Morganova zakona**: $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$.
  Iz česar lahko izpeljemo
$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \quad \text{in} \quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$
- A in B *disjunktni*: $A\cap B=\emptyset \iff A\subseteq B^c \iff B\subseteq A^c$.
- $A=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$, **razcep množice na unijo dveh *disjunktnih* množic**.

Potenčno množico množice A definiramo kot $\mathcal{P}(A)=\{B \mid B\subseteq A\}$. Vedno velja $\emptyset, A\in\mathcal{P}(A)$. Če je A končna množica z n elementi, ima $\mathcal{P}(A)$ 2^n elementov.

Funkcije

Naj bosta A in B množici. *Funkcija* $f: A\longrightarrow B$ priredi vsakemu elementu iz A natanko en element iz B. Naj bo še C neka množica in $g: B\longrightarrow C$ funkcija. Potem velja
$$\begin{aligned} f,g \text{ injektivni} &\implies g\circ f \text{ injektivna}\\ f,g \text{ surjektivni} &\implies g\circ f \text{ surjektivna},\\ g\circ f \text{ injektivna} &\implies f \text{ injektivna},\\ g\circ f \text{ surjektivna} &\implies g \text{ surjektivna}.\end{aligned}$$
Naj bosta $f: A\longrightarrow B$ in $g: B\longrightarrow A$ funkciji. Če je $f\circ g=\mathrm{id}_B$ in $g\circ f=\mathrm{id}_A$, potem sta f in g bijektivni in $g=f^{-1}$.

Slike in praslike

Naj bosta A in B množici, $f: A\longrightarrow B$ funkcija ter $A_1, A_2\subseteq A$, $B_1, B_2\subseteq B$. Definiramo
- *slika* množice A_1 pri f: $f(A_1)=\{f(x) \mid x\in A_1\}=\{y\in B \mid \exists x\in A_1: f(x)=y\}$,
- *praslika* množice B_1 pri f: $f^{-1}(B_1)=\{x\in A \mid f(x)\in B_1\}$.

Potem velja
$$\begin{aligned} A_1 &\subseteq f^{-1}(f(A_1)) \quad \text{(če je } f \text{ injektivna, velja enačaj)},\\ B_1 &\supseteq f(f^{-1}(B_1)) \quad \text{(če je } f \text{ surjektivna, velja enačaj)},\\ B_1\cap f(A) &= f(f^{-1}(B_1)),\\ f^{-1}(B_1^c) &= (f^{-1}(B_1))^c,\\ f(A_1^c) &= f(A)\backslash f(A_1),\ \text{če je } f \text{ injektivna},\\ A_1\subseteq A_2 &\implies f(A_1)\subseteq f(A_2),\\ B_1\subseteq B_2 &\implies f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2).\end{aligned}$$
Naj bo $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{I}}$ družina podmnožic A, $\mathcal{I}\neq\emptyset$, in $\{B_\mu\}_{\mu\in\mathcal{J}}$ družina podmnožic B, $\mathcal{J}\neq\emptyset$. Potem velja
$$\begin{aligned} f\left(\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} f(A_\lambda),\\ f\left(\bigcap_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda\right) &\subseteq \bigcap_{\lambda\in\mathcal{I}} f(A_\lambda) \quad \text{(če je } f \text{ injektivna, velja enačaj)},\\ f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu\right) &= \bigcup_{\mu\in\mathcal{J}} f^{-1}(B_\mu),\\ f^{-1}\left(\bigcap_{\mu\in\mathcal{J}} B_\mu\right) &= \bigcap_{\mu\in\mathcal{J}} f^{-1}(B_\mu).\end{aligned}$$

Moč množic

Definicija

- Množici A in B imata *enako moč* (sta *ekvipolentni*), če obstaja bijektivna funkcija $f: A \longrightarrow B$.

- Množica A ima *manjšo ali enako moč* kot množica B, če obstaja injektivna funkcija $f: A \longrightarrow B$.

Definicija

- Množica A je *števno neskončna*, če ima enako moč kot množica naravnih števil, t. j. obstaja bijekcija med A in $\mathbb{N}$.

- Množica je *števna*, če je končna ali števno neskončna.

- Množica je *neštevna*, če ni števna.

Primeri števnih množic: končne množice, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, soda števila, naravna števila deljiva s 26,...
Primeri neštevnih množic: $\mathbb{R}$, intervali, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Števna unija števnih množic je števna.

Naj bo S neštevna množica (univerzalna množica) in $A \subseteq S$ števna. Potem je $A^c = S\backslash A$ neštevna. Če pa A ni števna, je lahko A^c tako števna kot neštevna. Na primer, naj bo $S = \mathbb{R}$ (neštevna) ter $A = (-\infty, 0) \subseteq S$ in $B = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \subseteq S$ (obe neštevni). Potem je $A^c = [0, \infty)$ neštevna, medtem ko je $B^c = \mathbb{Q}$ števna.