

# Testiranje matematičnega upanja $p$ za Bernoullijev slučajni eksperiment

## 1. Enostranski test ničelne hipoteze $H_0 : p \leq p_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$\text{Pišemo tudi } k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Testiranje  $H_0 : p \leq p_0$  proti  $p > p_0$  značilnosti  $\leq \alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } T > C, \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{če } T \leq C, \end{cases}$$

kjer je  $C$  **najmanjše** tako (celo) število, za katero je

$$P(B(n, p_0) > C) = 1 - P(B(n, p_0) \leq C) \leq \alpha.$$

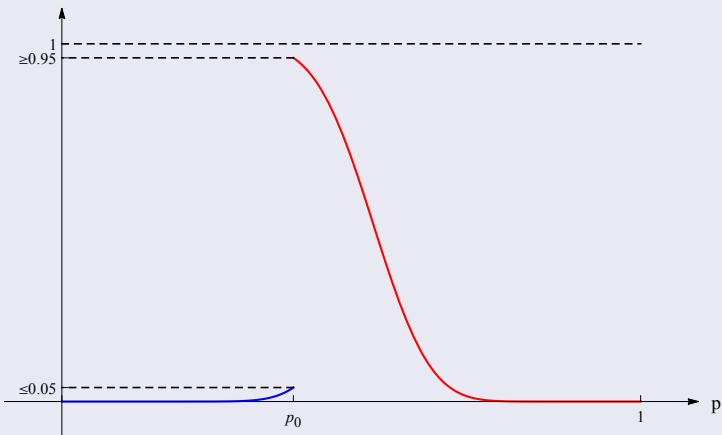
$p$ -vrednost: Če  $T = t$ , je  $p = P(B(n, p_0) \geq t) =$

$$= 1 - P(B(n, p_0) \leq t) + P(B(n, p_0) = t).$$

# Testiranje matematičnega upanja $p$ za Bernoullijev slučajni eksperiment

1. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : p \leq p_0$ , **napaki**

## Napaka 1. in napaka 2. vrste



# Testiranje matematičnega upanja $p$ za Bernoullijev slučajni eksperiment

## 2. Enostranski test ničelne hipoteze $H_0 : p \geq p_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$\text{Pišemo tudi } k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Testiranje  $H_0 : p \geq p_0$  proti  $p < p_0$  značilnosti  $\leq \alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } T < C, \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{če } T \geq C, \end{cases}$$

kjer je  $C$  **največje** tako (celo) število, za katero je

$$P(B(n, p_0) < C) = P(B(n, p_0) \leq C - 1) \leq \alpha.$$

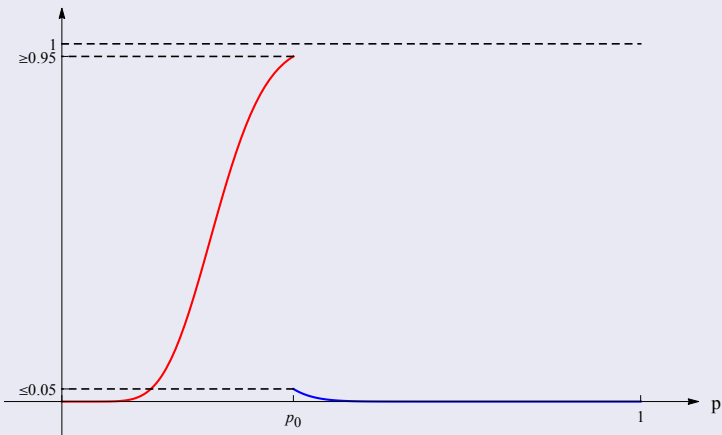
$p$ -vrednost

$$\text{Če } T = t, \text{ je } p = P(B(n, p_0) \leq t).$$

# Testiranje matematičnega upanja $p$ za Bernoullijev slučajni eksperiment

2. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : p \geq p_0$ , **napaki**

## Napaka 1. in napaka 2. vrste



# Testiranje matematičnega upanja $p$ za Bernoullijev slučajni eksperiment

## 3. Dvostranski test ničelne hipoteze $H_0 : p = p_0$



Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Pišemo tudi  $k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$



Testiranje  $H_0 : p = p_0$  proti  $p \neq p_0$  značilnosti  $\leq \alpha$

Privzemimo, da imamo interval zaupanja za  $p$  za vzorec velikosti  $n$  stopnje zaupanja  $\geq 1 - \alpha$ .

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } p_0 \text{ ne pripada intervalu zaupanja}(T), \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{če } p_0 \text{ pripada intervalu zaupanja}(T). \end{cases}$$

# Testiranje matematičnega upanja $p$ za Bernoullijev slučajni eksperiment

## 3. Dvostranski test ničelne hipoteze $H_0 : p = p_0$



Vzamemo lahko Clopper-Pearsonov eksaktni interval:

$$L(t) = \begin{cases} \text{Beta}(t, n - t + 1)_{-\alpha/2}, & t \geq 1, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

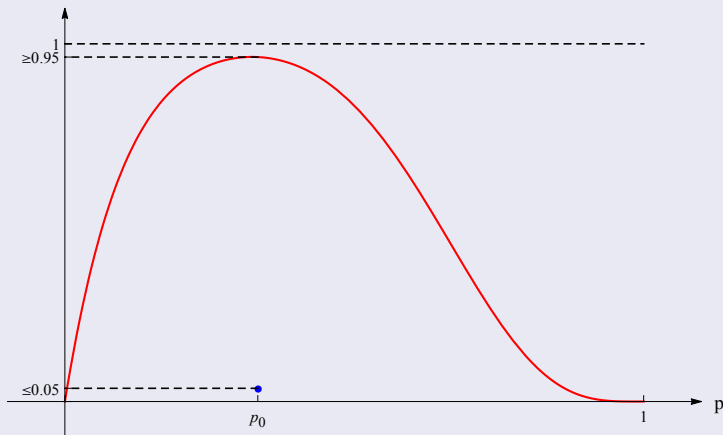
$$U(t) = \begin{cases} \text{Beta}(t + 1, n - t)_{\alpha/2}, & t < n, \\ 1, & t = n. \end{cases}$$

Tu sta  $\text{Beta}(a, b)_{\alpha/2}$  oziroma  $\text{Beta}(a, b)_{-\alpha/2}$  zgornji oziroma spodnji  $\alpha/2$ -percentil porazdelitve  $\text{Beta}(a, b)$ .

# Testiranje matematičnega upanja $p$ za Bernoullijev slučajni eksperiment

3. Dvostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : p = p_0$ , **napaki**

## Napaka 1. in napaka 2. vrste



# Testiranje matematičnega upanja $\lambda$ za Poissonov slučajni eksperiment

1. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$\text{Pišemo tudi } k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Testiranje  $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$  proti  $\lambda > \lambda_0$  značilnosti  $\leq \alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } T > C, \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{če } T \leq C, \end{cases}$$

kjer je  $C$  **najmanjše** tako (celo) število, za katero je

$$P(\text{Poisson}(n \cdot \lambda_0) > C) = 1 - P(\text{Poisson}(n \cdot \lambda_0) \leq C) \leq \alpha.$$

$p$ -vrednost: Če  $T = t$ , je  $p = P(\text{Poisson}(n \cdot \lambda_0) \geq t) =$

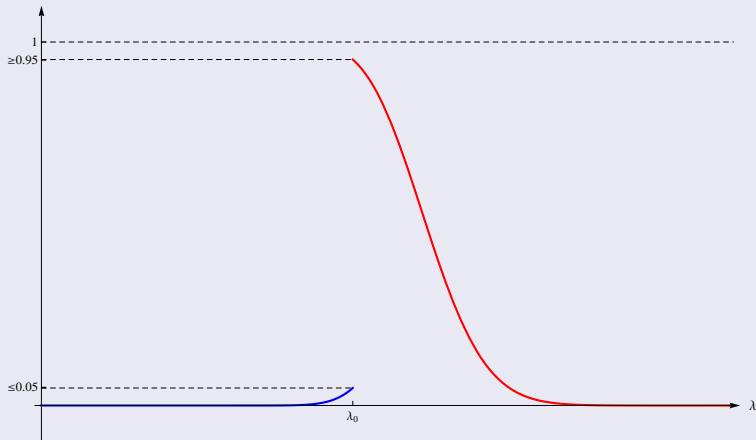
$$= 1 - P(\text{Poisson}(n \cdot \lambda_0) \leq t) + P(\text{Poisson}(n \cdot \lambda_0) = t).$$



# Testiranje matematičnega upanja $\lambda$ za Poissonov slučajni eksperiment

1. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ , **napaki**

## Napaka 1. in napaka 2. vrste



# Testiranje matematičnega upanja $\lambda$ za Poissonov slučajni eksperiment

## 2. Enostranski test ničelne hipoteze $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$\text{Pišemo tudi } k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Testiranje  $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$  proti  $\lambda < \lambda_0$  značilnosti  $\leq \alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } T < C, \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{če } T \geq C, \end{cases}$$

kjer je  $C$  **največje** tako (celo) število, za katero je

$$P(\text{Poisson}(n \cdot \lambda_0) < C) = P(\text{Poisson}(n \cdot \lambda_0) \leq C - 1) \leq \alpha.$$

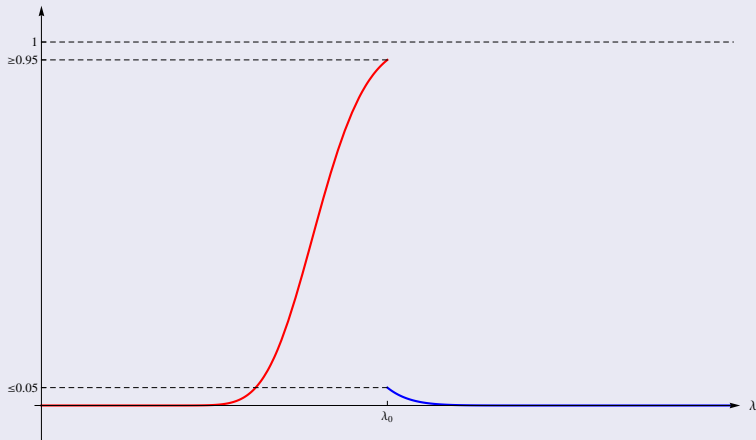
$p$ -vrednost

$$\text{Če } T = t, \text{ je } p = P(\text{Poisson}(n \cdot \lambda_0) \leq t).$$

# Testiranje matematičnega upanja $\lambda$ za Poissonov slučajni eksperiment

2. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$ , **napaki**

## Napaka 1. in napaka 2. vrste



# Testiranje matematičnega upanja $\lambda$ za Poissonov slučajni eksperiment


## 3. Dvostranski test ničelne hipoteze $H_0 : \lambda = \lambda_0$



Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Pišemo tudi  $k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$



Testiranje  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  proti  $\lambda \neq \lambda_0$  značilnosti  $\leq \alpha$

Privzemimo, da imamo interval zaupanja za  $\lambda$  za vzorec velikosti  $n$  stopnje zaupanja  $\geq 1 - \alpha$ .

$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } \lambda_0 \text{ ne pripada intervalu zaupanja}(T), \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{če } \lambda_0 \text{ pripada intervalu zaupanja}(T). \end{cases}$

# Testiranje matematičnega upanja $\lambda$ za Poissonov slučajni eksperiment

## 3. Dvostranski test ničelne hipoteze $H_0 : \lambda = \lambda_0$



Vzamemo lahko naslednji eksaktni interval:

$$L(t) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \chi_{2t; -\alpha/2}^2, & t \geq 1, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

$$U(t) = \frac{1}{2n} \chi_{2(t+1); \alpha/2}^2.$$

Tu sta  $\chi_{k; \alpha/2}^2$  oziroma  $\chi_{k; -\alpha/2}^2$  zgornji oziroma spodnji  $\alpha/2$ -percentil hi-kvadrat porazdelitve s  $k$  prostostnimi stopnjami.

# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah: odklon poznan

## 1. Enostranski test ničelne hipoteze $H_0 : \mu \leq \mu_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Testiranje  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  proti  $\mu > \mu_0$  pri značilnosti  $\alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{sicer.} \end{cases}$$

$z_\alpha$  : zgornji  $\alpha$ -percentil standardne normalne porazdelitve.

p-vrednost

$$P(Z \geq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}).$$

# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah: odklon nepoznan

1. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : \mu \leq \mu_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}, \text{ kjer } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Testiranje  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  proti  $\mu > \mu_0$  pri značilnosti  $\alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1; \alpha} \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{sicer.} \end{cases}$$

$t_{n-1; \alpha}$  : zgornji  $\alpha$ -percentil t-porazdelitve z  $n - 1$  pr. stopnjami.

p-vrednost

$$P(T_{n-1} \geq \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}).$$

# Testiranje matematičnega upanja v poljubnih populacijah: veliki vzorci

1. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : \mu \leq \mu_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}, \text{ kjer } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Testiranje  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  proti  $\mu > \mu_0$  pri pribl. značilnosti  $\alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > z_\alpha, \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{sicer.} \end{cases}$$

$z_\alpha$  : zgornji  $\alpha$ -percentil standardne normalne porazdelitve.

pribl. p-vrednost

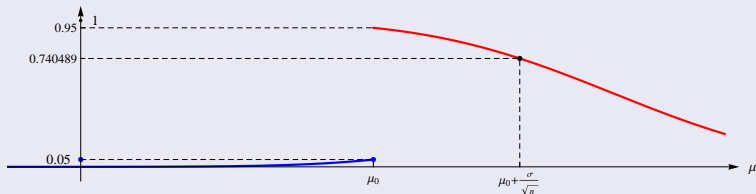
$$P(Z \geq \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}).$$



# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah: odklon poznan

1. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : \mu \leq \mu_0$ , **napake**

## Napaka 1. in napaka 2. vrste



# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah: odklon poznan

2. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : \mu \geq \mu_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Testiranje  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  proti  $\mu < \mu_0$  pri značilnosti  $\alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{sicer.} \end{cases}$$

$z_\alpha$  : zgornji  $\alpha$ -percentil standardne normalne porazdelitve.

p-vrednost

$$P(Z \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}).$$

# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah:

## odklon nepoznan

2. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : \mu \geq \mu_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}, \text{ kjer } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Testiranje  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  proti  $\mu < \mu_0$  pri značilnosti  $\alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{n-1; \alpha}, \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{sicer.} \end{cases}$$

$t_{n-1; \alpha}$  : zgornji  $\alpha$ -percentil  $t$ -porazdelitve z  $n - 1$  pr. stopnjami.

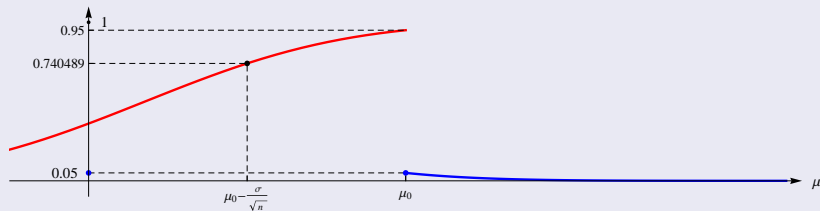
p-vrednost

$$P(T_{n-1} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}).$$

# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah: odklon poznan

2. Enostranski test ničelne hipoteze  $H_0 : \mu \geq \mu_0$ , **napake**

## Napaka 1. in napaka 2. vrste



# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah: odklon poznan

## 3. Dvostranski test ničelne hipoteze $H_0 : \mu = \mu_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Testiranje  $H_0 : \mu = \mu_0$  proti  $\mu \neq \mu_0$  pri značilnosti  $\alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2} \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{sicer.} \end{cases}$$

$z_{\alpha/2}$  : zgornji  $\alpha/2$ -percentil standardne normalne porazdelitve.

**pribl.** p-vrednost

$$P(|Z| \geq \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right|) = 2 \cdot P(Z \geq \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right|).$$

# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah:

## odklon nepoznan

### 3. Dvostranski test ničelne hipoteze $H_0 : \mu = \mu_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}, \text{ kjer } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Testiranje  $H_0 : \mu = \mu_0$  proti  $\mu \neq \mu_0$  pri značilnosti  $\alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| > t_{n-1; \alpha/2} \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{sicer.} \end{cases}$$

$t_{n-1; \alpha/2}$  : zgornji  $\alpha/2$ -percentil **t-porazdelitve** z  $n - 1$  pr. stopnjami.

**pribl.** p-vrednost

$$P(|T_{n-1}| \geq \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right|) = 2 \cdot P(T_{n-1} \geq \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right|).$$

# Testiranje matematičnega upanja v poljubnih populacijah: veliki vzorci

## 3. Dvostranski test ničelne hipoteze $H_0 : \mu = \mu_0$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}, \text{ kjer } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Testiranje  $H_0 : \mu = \mu_0$  proti  $\mu \neq \mu_0$  pri pribl. značilnosti  $\alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2}, \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{sicer.} \end{cases}$$

$z_{\alpha/2}$  : zgornji  $\alpha/2$ -percentil standardne normalne porazdelitve.

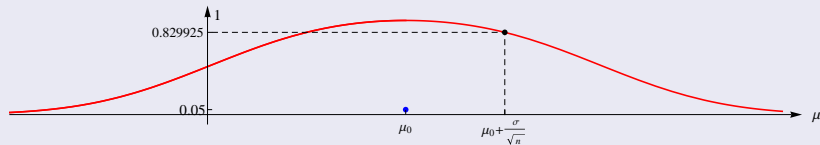
pribl. p-vrednost

$$P(|Z| \geq \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right|) = 2 \cdot P(Z \geq \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right|).$$

# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah: odklon poznan

## 3. Dvostranski test ničelne hipoteze $H_0 : \mu = \mu_0$ , napake

### Napaka 1. in napaka 2. vrste





# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah: odklon poznan

4. Test ničelne hipoteze  $H_0 : |\mu - \mu_0| \geq \delta$

Testna statistika za vzorec velikosti  $n$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Testiranje  $H_0 : |\mu - \mu_0| \geq \delta$  proti  $|\mu - \mu_0| < \delta$  pri značilnosti  $\alpha$

$$\begin{cases} H_0 \text{ zavrnamo,} & \text{če } \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| < \tau, \\ H_0 \text{ ne zavrnamo,} & \text{sicer.} \end{cases}$$

Število  $\tau$  je določeno z zahtevo  $P\left(-\tau + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} < Z < \tau + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha$ .

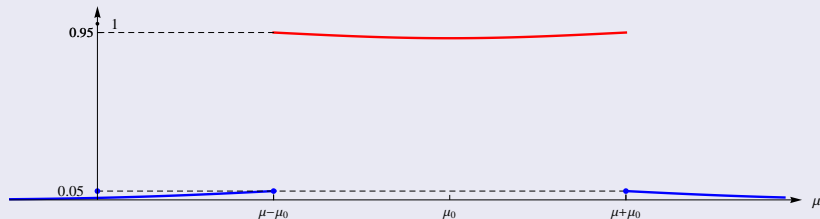
$p$ -vrednost

$$P\left(-\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \leq Z \leq \left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

# Testiranje matematičnega upanja v normalnih populacijah: odklon poznan

4. Test ničelne hipoteze  $H_0 : |\mu - \mu_0| \geq \delta$ , **napake**

## Napaka 1. in napaka 2. vrste



# Dve normalni populaciji: odklona poznana

Testiranje razlike med pričakovanima vrednostima

Možne ničelne hipoteze

$$\mu_1 - \mu_2 \leq D_0, \mu_1 - \mu_2 \geq D_0, \mu_1 - \mu_2 = D_0.$$

Testna statistika za neodvisna vzorca velikosti  $n_1, n_2$

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - D_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

Porazdelitev testne statistike pri pogoju  $\mu_1 - \mu_2 = D_0$

Standardna normalna porazdelitev.

Percentili

Za enostranski test vzamemo zgornji  $\alpha$ -percentil, za dvostranski test pa zgornji  $\alpha/2$ -percentil ustrezne porazdelitve.

# Dve normalni odklona nepoznana

Testiranje razlike med pričakovanima vrednostima

Možne ničelne hipoteze

$$\mu_1 - \mu_2 \leq D_0, \mu_1 - \mu_2 \geq D_0, \mu_1 - \mu_2 = D_0.$$

Testna statistika za neodvisna vzorca velikosti  $n_1, n_2$

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - D_0}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}, \text{ kjer } S_j = \sqrt{\frac{1}{n_j-1} \sum_{i=1}^{n_j} ((X_j)_i - \bar{X}_j)^2}.$$

Približna porazdelitev testne statistike pri pogoju  $\mu_1 - \mu_2 = D_0$

Studentova t-porazdelitev, kjer je število prostostnih stopenj

spodnji celi del števila: 
$$\frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{1}{n_1-1} (S_1^2/n_1)^2 + \frac{1}{n_2-1} (S_2^2/n_2)^2}.$$

Percentili

Za enostranski test vzamemo zgornji  $\alpha$ -percentil, za dvostranski test pa zgornji  $\alpha/2$ -percentil ustrezne porazdelitve.

# Dve poljubni populaciji: veliki vzorci

Testiranje razlike med pričakovanima vrednostima

Možne ničelne hipoteze

$$\mu_1 - \mu_2 \leq D_0, \mu_1 - \mu_2 \geq D_0, \mu_1 - \mu_2 = D_0.$$

Testna statistika za neodvisna vzorca velikosti  $n_1, n_2$

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - D_0}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}, \text{ kjer } S_j = \sqrt{\frac{1}{n_j-1} \sum_{i=1}^{n_j} ((X_j)_i - \bar{X}_j)^2}.$$

Približna porazdelitev testne statistike pri pogoju  $\mu_1 - \mu_2 = D_0$

Standardna normalna porazdelitev.

Percentili

Za enostranski test vzamemo zgornji  $\alpha$ -percentil, za dvostranski test pa zgornji  $\alpha/2$ -percentil ustrezne porazdelitve.