Grafi pokritosti intervalov zaupanja za delež

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajni vzorec, porazdeljen Bernoullijevo z neznanim parametrom $p \in (0,1)$. Označimo $K = X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ in $\hat{p} = \frac{K}{n}$. Slučajna spremenljivka K je porazdeljena binomsko s parametroma n in p. Relativna frekvenca $\hat{p}$ je nepristranska cenilka za p. Za delež p lahko izpeljemo več eksaktnih in približnih intervalov zaupanja.

Naj bo $[L(X_1, X_2, \ldots, X_n), U(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$ nek interval zaupanja za p. Za vnaprej znano velikost vzorca n je *pokritost* funkcija $f : (0,1) \longrightarrow [0,1]$, definirana s predpisom

$$f_n(p) = P_p(p \in [L(X_1, X_2, \ldots, X_n), U(X_1, X_2, \ldots, X_n)]).$$

Število β je *stopnja zaupanja*, če je $f_n(p) \geq \beta$ za vsak $p \in (0,1)$.

Približno lahko izračunamo pokritost intervala zaupanja tudi numerično. Naj bo n vnaprej dana velikost vzorca in p vrednost, v kateri računamo pokritost. Simuliramo r slučajnih vzorcev velikosti n, ki so porazdeljeni Bernoullijevo s parametrom p, in za vsak vzorec izračunamo interval zaupanja. Potem je

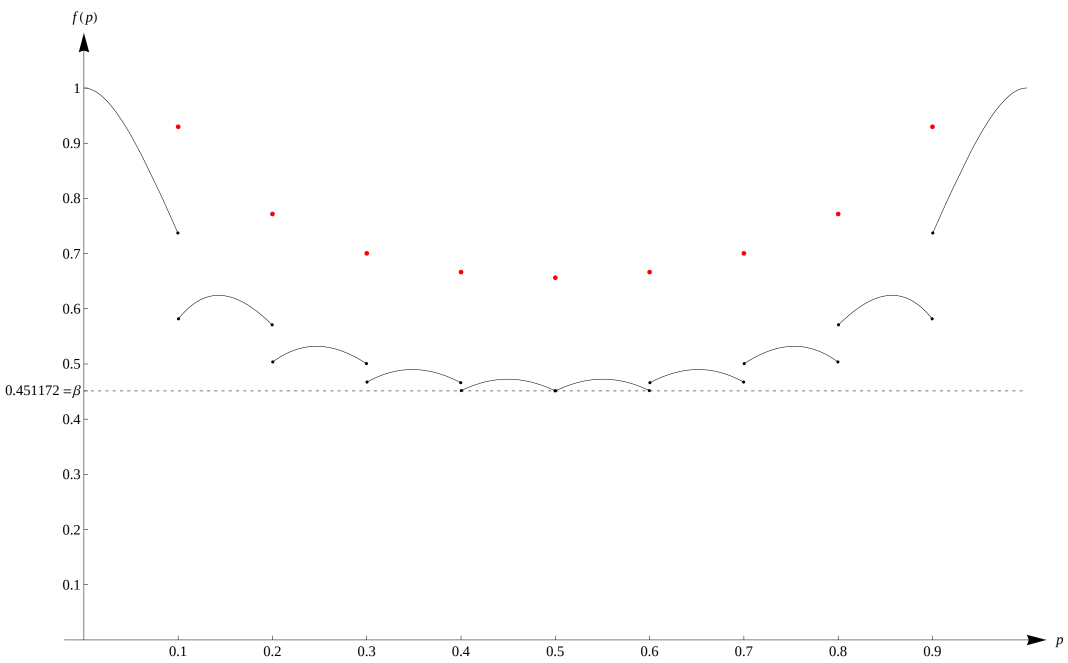
$$f_n(p) \approx \frac{\text{število intervalov zaupanja, ki vsebujejo } p}{r}.$$

Približek se seveda izboljšuje z večanjem števila simulacij r.

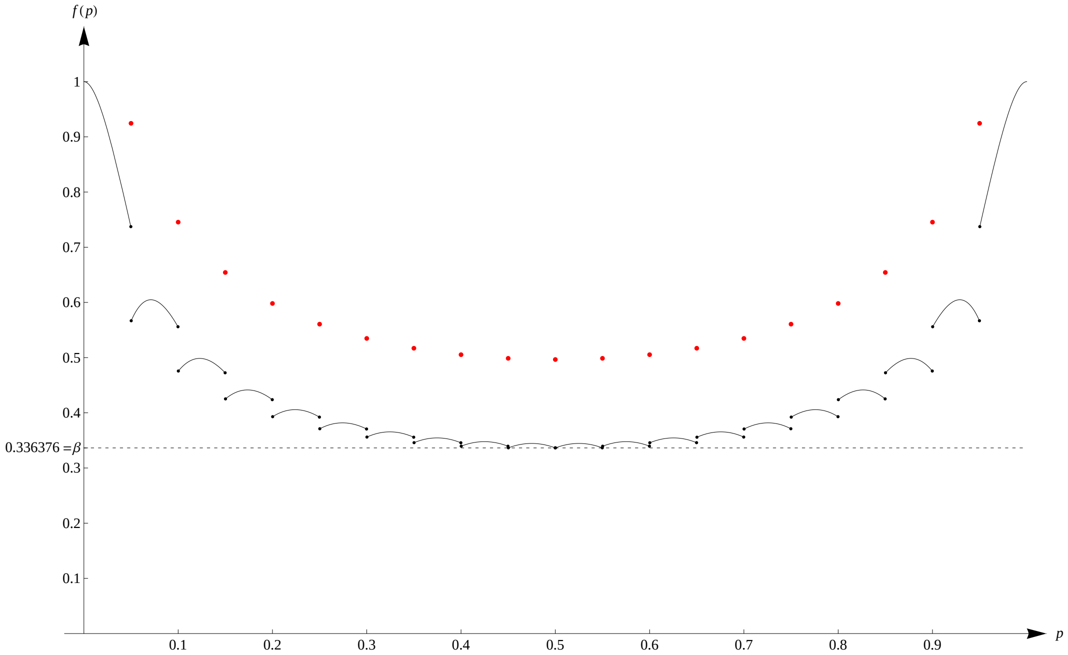
1 Naivni interval zaupanja

Na predavanjih ste obravnavali eksaktni interval zaupanja $\left[\frac{K-1}{n}, \frac{K+1}{n}\right]$. Temu intervalu zaupanja ne moremo vnaprej določiti stopnje zaupanja. Stopnja zaupanja je odvisna od velikosti vzorca in jo lahko izračunamo iz pokritosti kot $\beta = \inf\{f_n(p) | p \in (0,1)\}$.

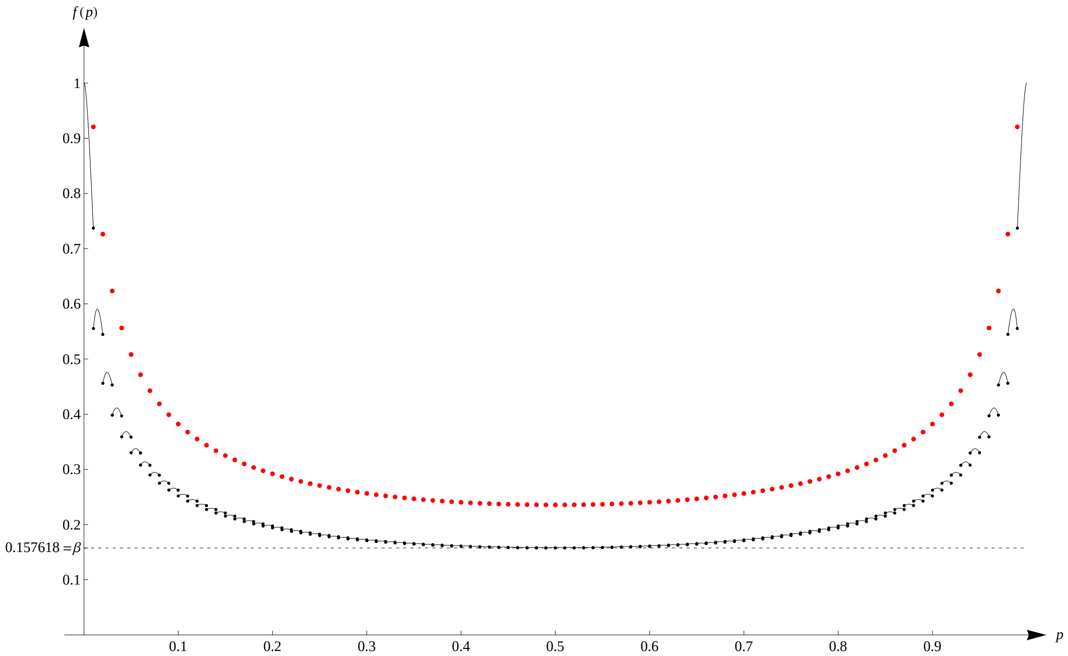
Na spodnjih treh slikah so narisani grafi pokritosti v programu Mathematica za velikosti vzorca 10, 20 in 100. Na ordinati so označene pripadajoče stopnje zaupanja β. Pokritost v točkah nezveznosti je narisana z rdečo barvo.



Slika 1: Pokritost naivnega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 10}$.



Slika 2: Pokritost naivnega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 20}$.



Slika 3: Pokritost naivnega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 100}$.

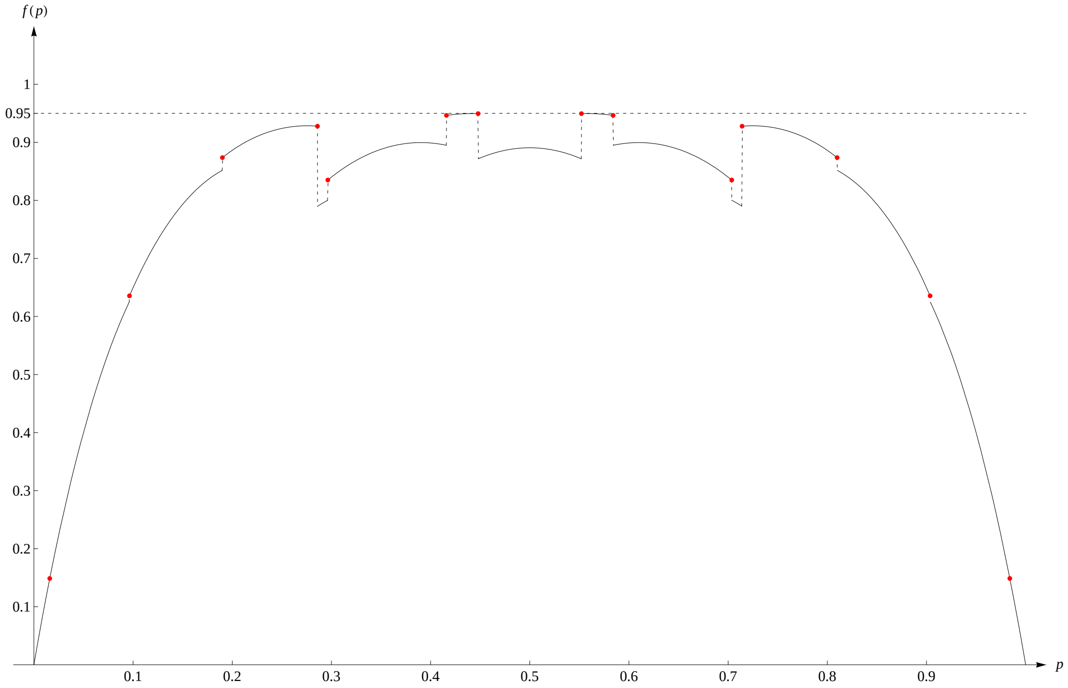
2 Približni interval zaupanja z aproksimacijo CLI in ZVŠ

Na vajah smo izpeljali približni interval zaupanja s pomočjo aproksimacije centralnega limitnega izreka in zakona velikih števil. Pri velikosti vzorca n in približni stopnji zaupanja $\tilde{\beta}$ je ta enak

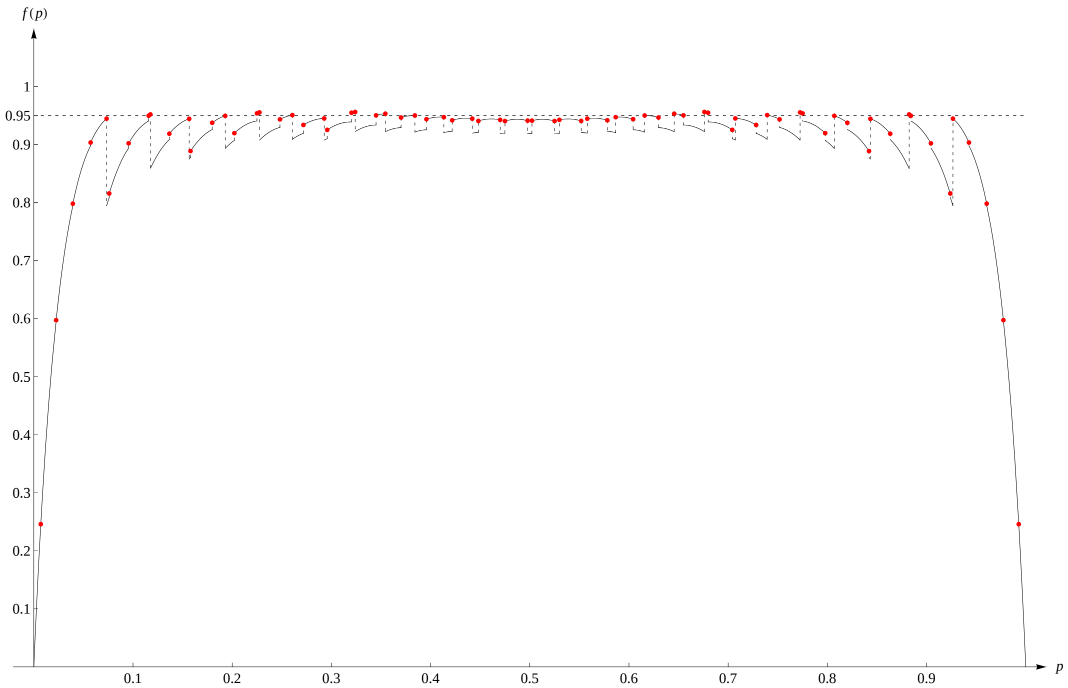
$$\left[\hat{p} - \Phi^{-1}\left(\frac{1+\tilde{\beta}}{2}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + \Phi^{-1}\left(\frac{1+\tilde{\beta}}{2}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right],$$

kjer je Φ porazdelitvena funkcija standardne normalne porazdelitve. Če je aproksimacija dobra, bi torej morala biti pokritost blizu $\tilde{\beta}$.

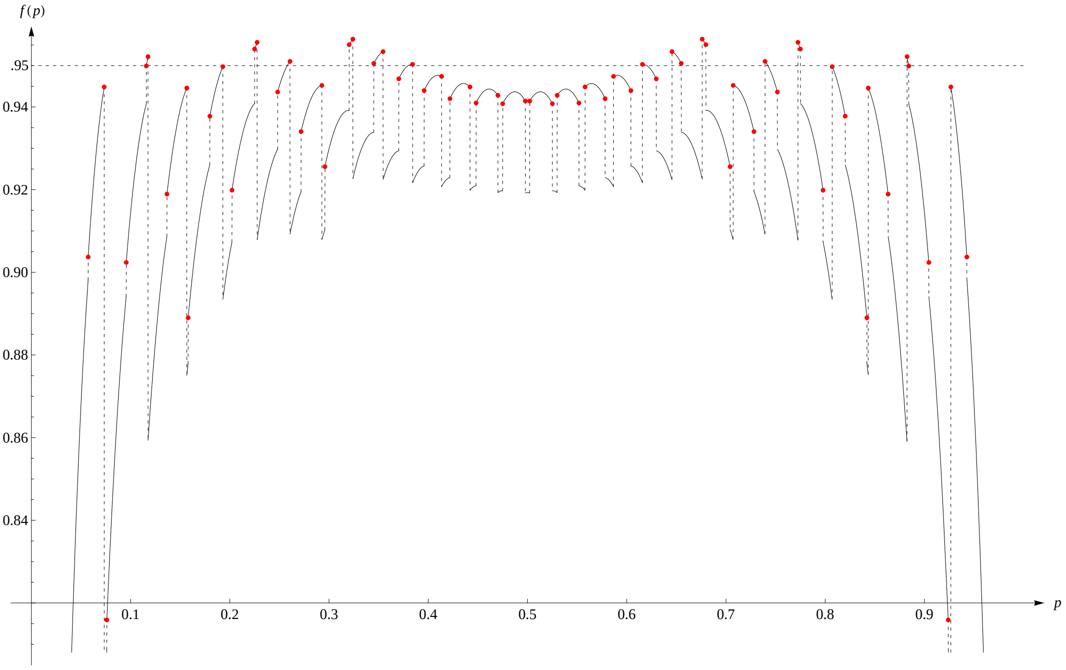
Vsi spodnji grafi pokritosti so narisani pri približni stopnji zaupanja $\tilde{\beta} = 0.95$, ki je označena na ordinati. Na prvih treh grafih, ki so narisani v programu Mathematica, je vrednost pokritosti v točkah nezveznosti zopet označena z rdečo barvo, leve in desne limite v teh točkah pa so povezane s črtkano črto. Preostali grafi, ki prikazujejo primerjavo pokritosti pri različnih velikostih vzorca, so narisani v programu R. Tu so leve in desne limite v točkah nezveznosti povezane z navpično daljico (kar je avtomatičen izris grafov pokritosti tako v programu R, kakor tudi v Mathematici).



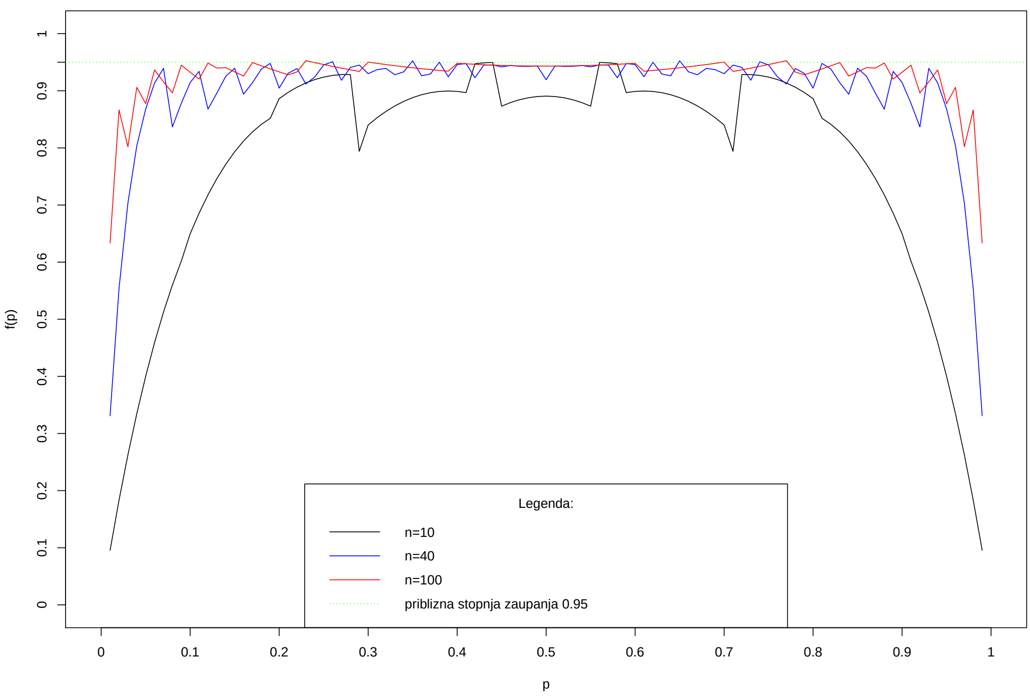
Slika 4: Pokritost približnega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 10}$ in $\tilde{\beta} = 0.95$.



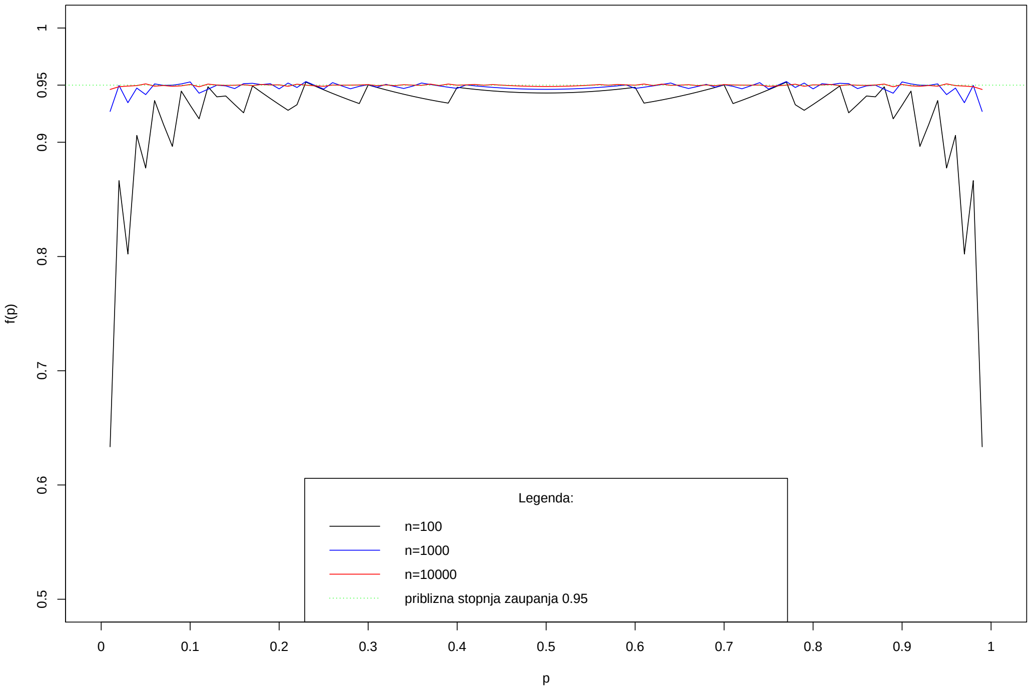
Slika 5: Pokritost približnega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 40}$ in $\tilde{\beta} = 0.95$.



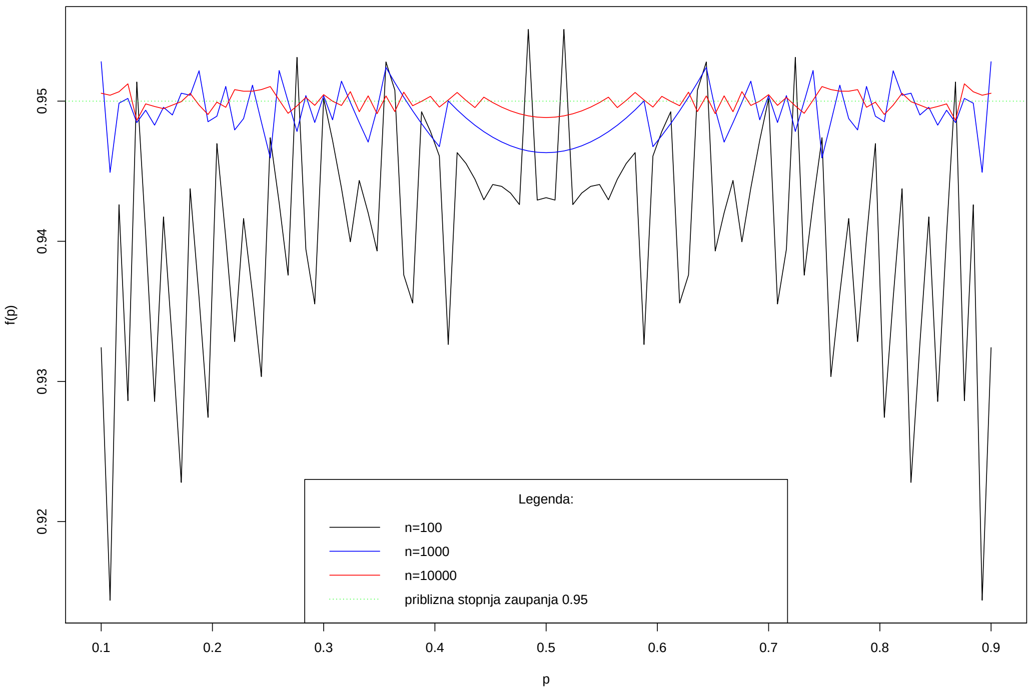
Slika 6: Pokritost približnega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 40}$ in $\tilde{\beta} = 0.95$ – približano.



Slika 7: Pokritost približnega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 10, 40, 100}$ in $\tilde{\beta} = 0.95$.



Slika 8: Pokritost približnega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 100, 1000, 10000}$ in $\tilde{\beta} = 0.95$.



Slika 9: Pokritost približnega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 100, 1000, 10000}$ in $\tilde{\beta} = 0.95$ – približano.

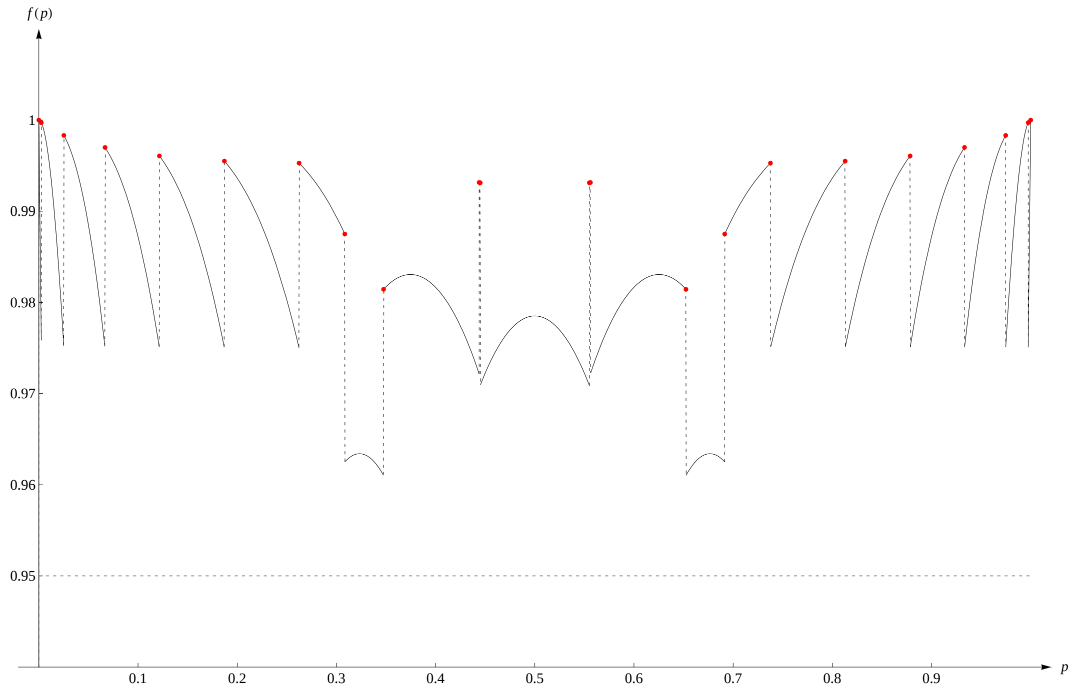
3 Clopper-Pearsonov interval zaupanja

Na vajah smo obravnavali Clopper-Pearsonov eksaktni interval zaupanja. Pri velikosti vzorca n in stopnji zaupanja β je ta enak $[L(K), U(K)]$, kjer je

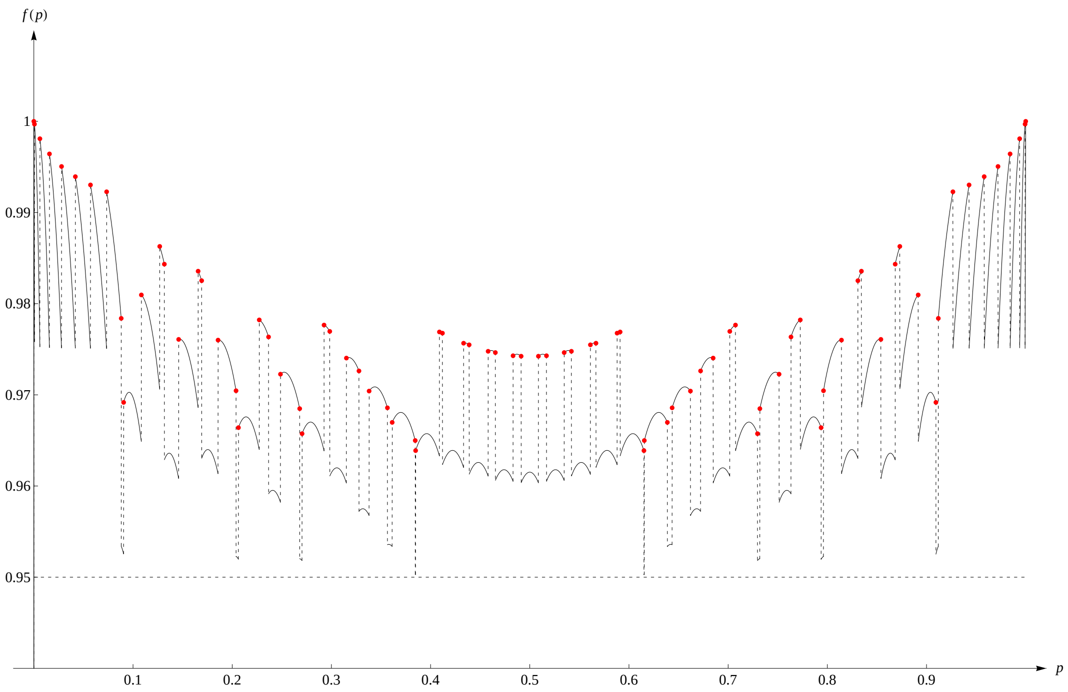
$$L(K) = \begin{cases} F^{-1}_{\mathrm{B}(K,n-K+1)}\left(\frac{1-\beta}{2}\right), & \text{če } K > 0, \\ 0, & \text{če } K = 0; \end{cases} \qquad U(K) = \begin{cases} F^{-1}_{\mathrm{B}(K+1,n-K)}\left(\frac{1+\beta}{2}\right), & \text{če } K < n, \\ 1, & \text{če } K = n. \end{cases}$$

Ker je interval zaupanja eksakten, je njegova pokritost večja od β za vse vrednosti neznanega parametra p.

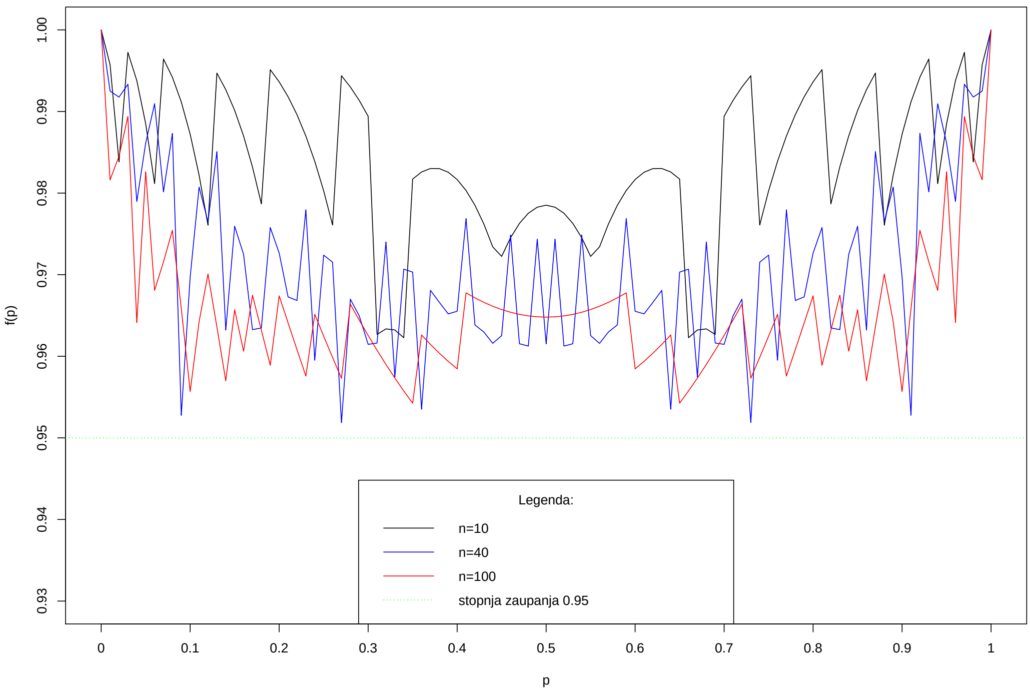
Vsi spodnji grafi pokritosti so narisani pri stopnji zaupanja $\beta = 0.95$, ki je označena na ordinati. Prva dva grafa sta narisana v programu Mathematica, druga dva pa v programu R. Komentarji k izgledu grafov so enaki tistim iz prejšnjega razdelka.



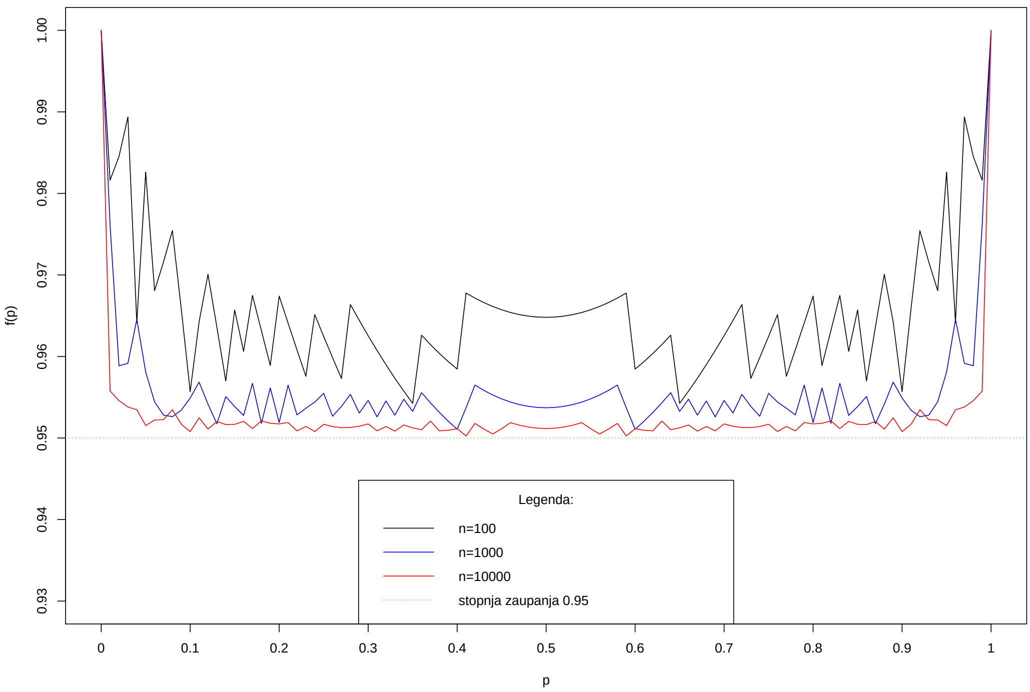
Slika 10: Pokritost Clopper-Pearsonovega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 10}$ in $\beta = 0.95$.



Slika 11: Pokritost Clopper-Pearsonovega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 40}$ in $\beta = 0.95$.



Slika 12: Pokritost Clopper-Pearsonovega intervala zaupanja pri $\boldsymbol{n = 10, 40, 100}$ in $\beta = 0.95$.

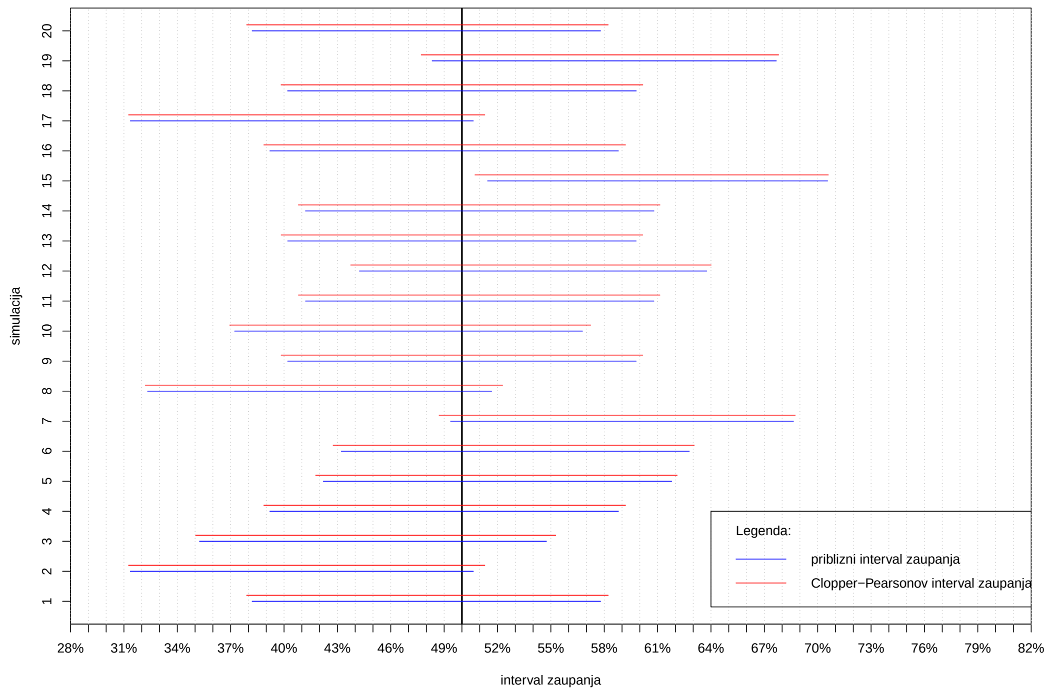


Slika 13: Pokritost Clopper-Pearsonovega zaupanja pri $\boldsymbol{n = 100, 1000, 10000}$ in $\beta = 0.95$.

4 Simulacija intervalov zaupanja

Simuliramo $r = 20$ slučajnih vzorcev velikosti $n = 100$, ki so porazdeljeni Bernoullijevo s parametrom $p = 0.5$. Za vsak vzorec izračunamo približni in Clopper-Pearsonov interval zaupanja, oba pri stopnji zaupanja 0.95. Na sliki 14 so izračunani intervali zaupanja prikazani grafično. Na ordinati je označena zaporedna številka vzorca. Krepko je označena prava vrednost $p = 0.5$.

Za obe vrsti intervala zaupanja opazimo, da prava vrednost p ni vsebovana v intervalu zaupanja le pri 15. simulaciji vzorca. Pri velikosti vzorca $n = 100$ in stopnji zaupanja 0.95 je torej numerično izračunana pokritost obeh intervalov zaupanja v vrednosti $p = 0.5$ enaka $19/20 = 0.95$.



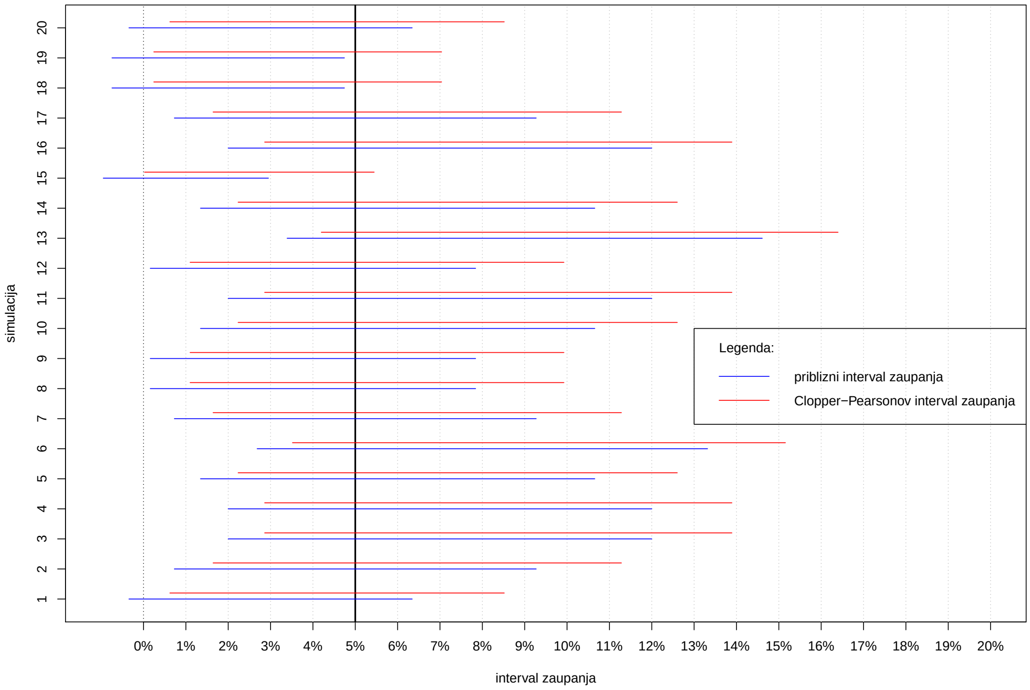
Slika 14: Intervali zaupanja simuliranih vzorcev s pravo vrednostjo parametra $p = 0.5$.

Ponovimo simulacijo in vse izračune, kjer spremenimo le pravo vrednost parametra Bernoullijeve porazdelitve v $p = 0.05$. Pripadajoči grafični prikaz je na spodnji sliki.

Za Clopper-Pearsonov interval zaupanja opazimo, da je prava vrednost p vsebovana v intervalih zaupanja vseh simuliranih vzorcev. Pri velikosti vzorca $n = 100$ in stopnji zaupanja 0.95 je torej numerično izračunana pokritost Clopper-Pearsoovega intervala zaupanja v vrednosti $p = 0.05$ enaka $20/20 = 1$.

Za približni interval zaupanja opazimo, da prava vrednost p ni vsebovana v intervalih zaupanja pri 15., 18. in 19. simulaciji vzorca. Pri velikosti vzorca $n = 100$ in približni stopnji zaupanja 0.95 je torej numerično izračunana pokritost približnega intervala zaupanja v vrednosti $p = 0.05$ enaka $17/20 = 0.85$.

Za namen računanja numerične pokritosti bi bilo seveda smiselno narediti večje število simuliranih vzorcev r ($r = 20$ je izbran zaradi nazornosti grafičnega prikaza izračunanih intervalov zaupanja).



Slika 15: Intervali zaupanja simuliranih vzorcev s pravo vrednostjo parametra $p = 0.05$.