Rešitve izpita iz teorije iger z dne 30. 8. 2011

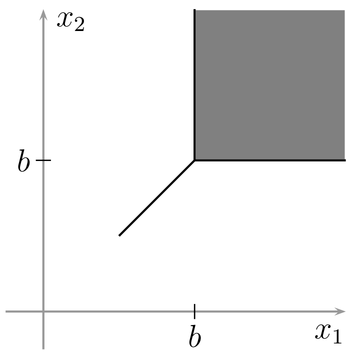
FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Gre za strateško igro s preferenčnima funkcijama:

$$u_1(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1(b-x_2)_+ & ; x_1 \le x_2 \\ \frac{1}{2}x_1(b-x_1)_+ & ; x_1 \ge x_2 \end{cases},$$

$$u_2(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_2(b-x_2)_+ & ; x_1 \le x_2 \\ \frac{1}{2}x_2(b-x_1)_+ & ; x_1 \ge x_2 \end{cases},$$

kjer smo označili $x_+ = \max\{x, 0\}$, x_1 in x_2 pa sta ceni na enoto blaga, ki ju postavita proizvajalca.
Če oba proizvajalca določita ceno, večjo ali enako b, se ne proda nič blaga in to se ne spremeni, če eden od proizvajalcev spremeni ceno. Zato je taka točka Nashevo ravnovesje. Če eden izmed proizvajalcev določi ceno, večjo ali enako b, drugi pa ceno, manjšo od b, oba prodata več, če tisti, ki postavi višjo ceno, le-to zniža pod b. Zato tam ni Nashevega ravnovesja. Če pa oba postavita ceno, nižjo od b, je maksimum preferenčnih funkcij dosežen, če je $x_1 = \max\{x_2, b/2\}$ in $x_2 = \max\{x_1, b/2\}$. Torej je $x_1, x_2 \ge b/2$, od koder sledi, da mora biti $x_1 = x_2$. Nashevo ravnovesje je torej tudi vsaka točka, kjer je $x_1 = x_2 \ge b/2$. Graf množice Nashevih ravnovesij:



2. Hitro opazimo, da prva in druga strategija prvega igralca ne morata biti dominirani, tretja strategija pa je dominirana s kombinacijo $(1-p)$ prve in p druge natanko tedaj, ko je:

$$\frac{1}{2} \le p \le \frac{2}{3} \quad \text{in} \quad a \ge \frac{1-2p}{1-p}.$$

Z drugimi besedami, dominacija bo možna natanko tedaj, ko bo obstajal tak $p \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$, da bo veljala zadnja enačba. To pa bo natanko tedaj, ko bo $a \ge -1$.
Če zdaj vstavimo $a = -1$, dobimo, da je nivo varnosti za prvega igralca enak:

$$\max_{0\le p\le 1} \min\{4-3p, 1+4p, -1+3p\} = \frac{3}{2}.$$

3. Najprej opazimo, da v stanju ω_1 strategija D dominira strategijo L, v stanju ω_3 pa strategija L dominira strategijo D. Torej je pri drugem igralcu pomembno le, katero strategijo ubere v stanju ω_2. Tako lahko igro prevedemo na običajno strateško igro z mešanimi strategijami in koristnostnima funkcijama:

	L_2	D_2
A_{123}	$3{\cdot}5, 1$	$2, 2$
B_{123}	$3{\cdot}5, 5$	$3{\cdot}5, 4$
C_{123}	$2{\cdot}5, 0$	$1{\cdot}5, 7$

V tej igri je strategija C_{123} strogo dominirana tako z A_{123} kot tudi z B_{123}, zato jo lahko odstranimo. V tako dobljeni igri hitro vidimo, da je (B_{123}, L_2) edino čisto Nashevo ravnovesje. Med Nashevimi ravnovesji, od katerih eden ubere čisto strategijo, drugi pa meša, dobimo $\left(\begin{pmatrix} A_{123} & B_{123} \\ 1-p & p \end{pmatrix}, L_2\right)$ za $p \geq 1/2$. Nashevih ravnovesij, kjer bi oba strogo mešala, pa ni.

Sklep: mešana Bayesova ravnovesja igre so $\left(\begin{pmatrix} A_{123} & B_{123} \\ 1-p & p \end{pmatrix}, D_1L_2L_3\right)$, kjer je $1/2 \leq p \leq 1$.

4. Karakteristična funkcija je:

$$\begin{gathered} v(\emptyset) = 0\,, \quad v(\{A\}) = -650\,, \quad v(\{B\}) = -200\,, \quad v(\{C\}) = -300\,, \\ v(\{A,B\}) = -700\,, \quad v(\{A,C\}) = -700\,, \quad v(\{B,C\}) = -500\,, \\ v(\{A,B,C\}) = -750\,, \end{gathered}$$

Shapleyjeve vrednosti pa so:

$$\phi_A = -450\,, \quad \phi_B = -125\,, \quad \phi_C = -175\,.$$

V skladu s Shapleyjevimi vrednostmi bi moral torej Aljaž v skupno blagajno prispevati 450€, Bojan 125€, Cveto pa 175€.