Rešitve izpita iz teorije iger z dne 30. 8. 2012

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Pripadajoča strateška igra ima 5000 igralcev – uslužbencev, od katerih lahko vsak igra dve akciji (strategiji): vlak ali avto. Preferenčna funkcija je lahko čas, ki ga uslužbenec potrebuje za pot do službe, a je urejena nasprotno kot množica realnih števil: večje število pomeni nižjo preferenco in obratno.
Če se vsi uslužbenci peljejo z avtomobilom, vsak od njih za pot potrebuje 50 minut. Če se eden od njih namesto tega odloči potovati z vlakom, bo za pot potreboval 27˙005 minute, kar je ugodneje, torej to ni Nashevo ravnovesje.
Privzemimo zdaj, da se vsaj en uslužbenec pelje z vlakom, torej da je $y \geq 1$. Če število vlakov v predstavimo kot funkcijo spremenljivke y, dobimo, da smo v Nashevem ravnovesju natanko tedaj, ko velja:

$$25 + \frac{x}{200} \leq 15 + \frac{y+1}{200} + \frac{12}{v(y+1)}, \quad 15 + \frac{y}{200} + \frac{12}{v(y)} \leq 25 + \frac{x+1}{200}, \quad x + y = 5000,$$

kar je (če obdržimo zadnjo zvezo) ekvivalentno:

$$\frac{12}{v(y)} \leq 35 - \frac{y}{100} \leq \frac{12}{v(y+1)}$$

Ker je v padajoča funkcija, je ta zveza možna le, če je:

$$v(y) = v(y+1) \quad \text{in} \quad \frac{12}{v(y)} = 35 - \frac{y}{100}.$$

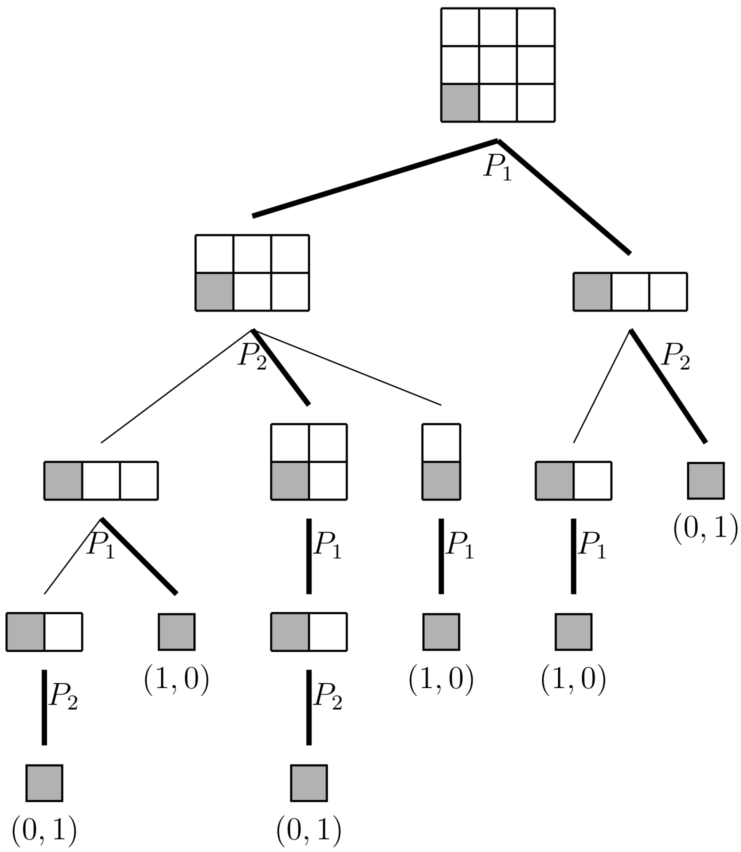
Za $1 \leq y \leq 2000$, torej $v(y) = 1$ dobimo $y = 2300$, kar je v nasprotju z začetnim pogojem. Za $2001 \leq y \leq 4000$ dobimo $y = 2900$, kar je v redu, za $4001 \leq y \leq 5000$ pa dobimo $y = 3100$, kar je spet v nasprotju z začetnim pogojem. Nashevo ravnovesje je torej natanko tedaj, ko se z vlakom pelje 2900, z avtomobilom pa 2100 uslužbencev. Formalno gledano ima igra $\binom{5000}{2100} \doteq 1˙97 \cdot 10^{1475}$ Nashevih ravnovesij.

2. Najprej opazimo, da je druga vrstica strogo dominirana s konveksno kombinacijo $(1-p)$-kratnika prve vrstice in p-kratnika tretje vrstice, brž ko je $3/8 < p < 1/2$. Zato lahko drugo vrstico izločimo. Preostaneta še dve vrstici, kar pomeni, da je Nashevo ravnovesje tam, kjer spodnja ovojnica stolpcev doseže maksimum. Če prvi igralec meša $(1-p)$-kratnik prve in p-kratnik tretje vrstice, je spodnja ovojnica stolpcev enaka:

$$\min\{8-4p, 1+8p, 2+4p\} = \begin{cases} 1+8p & ; p \leq 1/4 \\ 2+4p & ; 1/4 \leq p \leq 3/4 \\ 8-4p & ; p \geq 3/4 \end{cases}$$

in maksimum je dosežen pri $p = 3/4$. Torej prvi igralec meša $3/4$ prve vrstice in $1/4$ tretje, drugi igralec pa meša prvi in tretji stolpec, recimo $(1-q)$-kratnik prvega in q-kratnik tretjega. Iz principa indiferentnosti dobimo $8 - 6q = 4 + 2q$, torej $q = 1/2$. Nashevo ravnovesje je torej eno samo, in sicer ga lahko ponazorimo s parom vektorjev $\begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 3/4 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

3. Igro lahko modeliramo kot ekstenzivno igro z naslednjim drevesom (kjer so vmesna stanja kvadrati, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da igralec, ki je na potezi, lomi vrstice):



(odebeljene črte predstavljajo optimalne ali edine možne akcije). Iz diagrama je razvidno, da drugi igralec, če igra prav, vedno zmaga. Njegova strategija je preprosta: vedno mora odrezati tako, da dobi kvadrat. Torej je bolje biti na potezi kot drugi.

4. Če koalicija vsebuje Ambroža in še vsaj enega mesarja, dobi toliko, kolikor največ iztrži mesar, ki je v koaliciji. Sicer koalicija ne dobi ničesar. Torej velja:

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = v(\{B, C\}) = 0\,,$$
$$v(\{A, B\}) = 90\,, \qquad v(\{A, C\}) = v(\{A, B, C\}) = 120\,.$$

Pri delitvi dobička, ki je v jedru, Boris ne sme dobiti ničesar, sicer bi lahko Ambrož in Cveto izstopila iz velike koalicije in bi dobila več (100 denarnih enot). Toda Borisova prisotnost pomeni, da Cveto ne sme dobiti več kot 10 denarnih enot. V nasprotnem primeru bi namreč lahko Ambrož in Boris izstopila iz velike koalicije in bi dobila več (90 denarnih enot). Drugi izstopi iz koalicije pa pomenijo le, da na koncu nihče ne sme biti v minusu, saj je izkupiček drugih koalicij enak nič (ni pa negativen). Skratka, jedro predstavljajo natanko koalicije, pri katerih Ambrož dobi a, Boris nič, Cveto pa $100 - a$, kjer je $90 \leq a \leq 100$.
Za izračun Shapleyjevih vrednosti tabelirajmo prispevke posameznikov h koaliciji za vse možne vrstne rede pristopanja:

Vrstni red	A	B	C
A, B, C	0	90	30
A, C, B	0	0	120
B, A, C	90	0	30
B, C, A	120	0	0
C, A, B	120	0	0
C, B, A	120	0	0
Povprečje	75	15	30

Shapleyjeve vrednosti so torej $\phi_A = 75$, $\phi_B = 15$ in $\phi_3 = 30$, se pravi, da mora tudi Boris dobiti nekaj denarja.