Rešitve izpita iz teorije iger z dne 10. 2. 2012

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Akcije opišemo z urejenimi pari (i, s), kjer je i število iztegnjenih prstov (t. j. 1 ali 2), s pa je napoved skupnega števila iztegnjenih prstov. Smiselne akcije so $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ in $(2, 4)$. Koristnostni funkciji sta podani v naslednji tabeli:

	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(2,4)$
$(1,2)$	$0,0$	$1,0$	$0,1$	$0,0$
$(1,3)$	$0,1$	$0,0$	$0,0$	$1,0$
$(2,3)$	$1,0$	$0,0$	$0,0$	$0,1$
$(2,4)$	$0,0$	$0,1$	$1,0$	$0,0$

.

Mešano Nashevo ravnovesje npr. nastopi, če oba igralca mešata vse akcije z enakimi verjetnostmi. Bolj formalno, je oblike (π, π), kjer je:

$$\pi = \begin{pmatrix} (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

saj tedaj velja:

$$\begin{aligned} &U_1\big((1,2),\pi\big) = U_1\big((1,3),\pi\big) = U_1\big((2,3),\pi\big) = U_1\big((2,4),\pi\big) = \frac{1}{4} \quad \text{in} \\ &U_2\big(\pi,(1,2)\big) = U_2\big(\pi,(1,3)\big) = U_2\big(\pi,(2,3)\big) = U_2\big(\pi,(2,4)\big) = \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Še eno mešano Nashevo ravnovesje je tudi:

$$\left(\begin{pmatrix} (1,2) & (1,4) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right),$$

saj tedaj velja:

$$\begin{aligned} U_1\left((1,2)\,, \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) &= U_1\left((1,4)\,, \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \geq \\ \geq U_1\left((1,3)\,, \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) &= U_1\left((2,4)\,, \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{in} \\ U_2\left(\begin{pmatrix} (1,2) & (2,4) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, (1,3) \right) &= U_2\left(\begin{pmatrix} (1,2) & (2,4) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, (2,3) \right) = \frac{1}{2} \geq \\ \geq U_2\left(\begin{pmatrix} (1,2) & (2,4) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, (1,2) \right) &= U_2\left(\begin{pmatrix} (1,2) & (2,4) \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, (2,4) \right) = 0\,. \end{aligned}$$

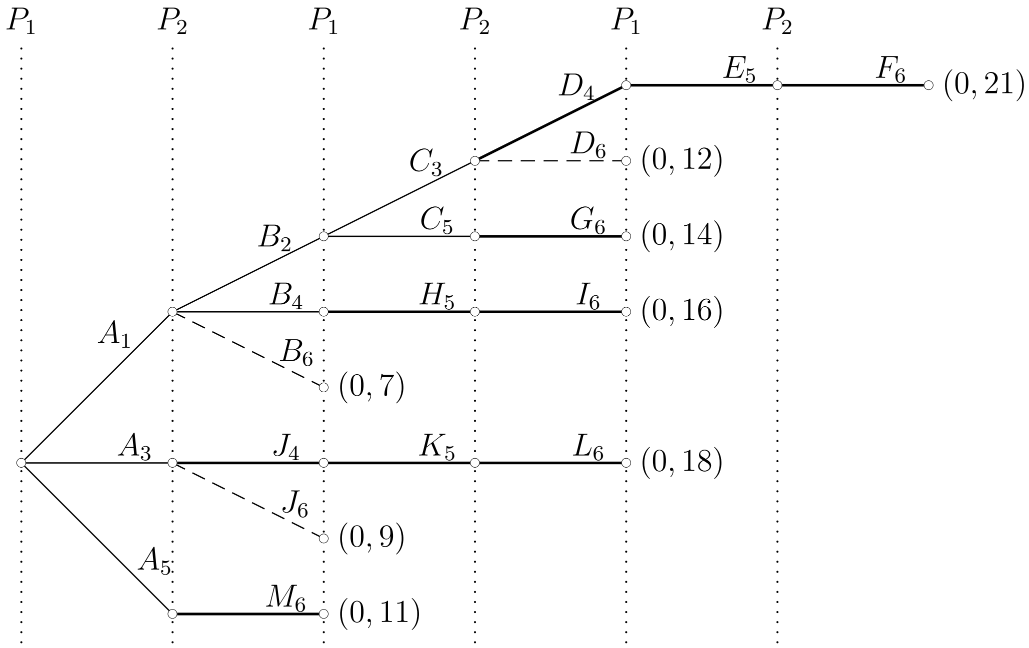
Opomba. Če bi akcijam, s katerimi smo delali, dodali še kakšno drugo akcijo (npr. $(1, 4)$), bi bila ta strogo dominirana s kombinacijo iz Nashevega ravnovesja, ki smo ga našli.

2. Prirejena igra s popolno informacijo ima štiri igralce: prvega s signalom iz stanja ω_1, prvega s signalom iz stanj ω_2, ω_3, drugega s signalom iz stanj ω_1, ω_2 in drugega s signalom iz stanja ω_3. Opazimo, da pri slednjem akcija L dominira akcijo D, zato lahko slednjo eliminiramo iz vseh nadaljnjih postopkov. Za preostale tri igralce dobimo naslednjo igro s popolno informacijo:

	L_{12}	D_{12}
A_1A_{23}	$3,1;4$	$4,3;2$
A_1B_{23}	$3,2;5$	$4,4;3$
B_1A_{23}	$1,1;0$	$5,3;3$
B_1B_{23}	$1,2;1$	$5,4;4$

Iz tabele je razvidno, da akcija B_{23} strogo dominira akcijo A_{23} (čeprav je v izvirni Bayesovi igri v stanju ω_2 ravno obratno – akcija A strogo dominira akcijo B). Tako dobimo igro za dva igralca, od katerih ima vsak po dve akciji. Mešana Bayesova ravnovesja: $(A_1B_{23}, L_{12}L_3)$, $(B_1B_{23}, D_{12}L_3)$, $\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} B_{23}, \begin{pmatrix} L_{12} & D_{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} L_3\right)$.

3. Gre za ekstenzivno igro, ki jo lahko ponazorimo z naslednjo sliko:



Indeks ob črki pomeni vrednost karte, ki jo položi igralec, ki je na potezi. Debelejše črte pomenijo akcije, ki jih igralec zagotovo izbere, črtkane črte pa akcije, ki jih zagotovo ne izbere. Tako bodo akcije D_4, E_5, F_6, G_6, H_5, I_6, J_4, K_5, L_6 in M_6 zagotovo v vsakem vgnezdenem Nashevem ravnovesju. Prvemu igralcu je vedno vseeno, kaj narediti, ne glede na to, kaj dela drugi igralec. Toda izbira akcije C_3 ali

C_5 odloča o akciji drugega igralca v drugi fazi igre. Vgnezdena Nasheva ravnovesja so torej oblike:

$$(A\,C_3E_5H_5K_5,\ B_2D_4F_6G_6I_6L_6J_4M_6) \quad \text{in} \quad (A\,C_5E_5H_5K_5,\ B_4D_4F_6G_6I_6L_6J_4M_6)\,,$$

kjer je A pri obeh lahko A_1, A_3 ali A_5. Skupaj jih je 6.

4. Shapleyjeva vrednost posameznega člana komisije je tukaj kar verjetnost, da ta član odločilno prispeva k sprejetju odločitve, če glasujejo v na slepo izbranem vrstnem redu. Predsednik odločilno prispeva, če je na tretjem ali četrtem mestu, torej ima Shapleyjevo vrednost $1/3$. Vsak drug član komisije pa odločilno prispeva, če je bodisi na tretjem mestu in predsednik pred njim bodisi na četrtem mestu in predsednik za njim. Njegova Shapleyjeva vrednost je $2/15$.