Rešitve izpita iz teorije iger z dne 11. 2. 2013

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Prispevki družbenikov so lahko kar njihove akcije, koristnostne funkcije pa so naslednje:

$$\begin{aligned} U_{\text{Aljaž}}(a,b,c) &= -2a + \frac{a}{a+b+c}\, f(a+b+c)\,, \\ U_{\text{Bogdan}}(a,b,c) &= -3b + \frac{b}{a+b+c}\, f(a+b+c)\,, \\ U_{\text{Ciril}}(a,b,c) &= -4c + \frac{c}{a+b+c}\, f(a+b+c)\,, \end{aligned}$$

kjer je:

$$f(x) = \begin{cases} 6000 & ;\ x \geq M \\ 0 & ;\ x < M \end{cases}\ ;$$

dodati moramo še:

$$U_{\text{Aljaž}}(0,0,0) = U_{\text{Bogdan}}(0,0,0) = U_{\text{Ciril}}(0,0,0) = 0\,.$$

Koristnostne funkcije imajo naslednjo lastnost: če vzamemo poljuben profil, je koristnostna funkcija vsakega družbenika na dovolj majhni desni okolici strogo padajoča v spremenljivki, ki pripada družbeniku. Zato je lahko Nashevo ravnovesje le v točki, kjer je $a+b+c = M$ ali pa so vsi trije prispevki enaki nič. Če torej želimo, da imata dva družbenika strogo pozitiven prispevek, mora biti $a+b+c = M$.
Privzemimo, da je $M > 0$ (če bomo našli ustrezni M s to lastnostjo, ne bo potrebno več iskati naprej). Profil (a,b,c), kjer je $a+b+c = M$, je strogo Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko velja:

$$\begin{aligned} &\frac{6000\,a}{a+b+c} - 2a \geq 0\,, &&\text{oziroma} && M \leq 3000\,, &&\text{če je} && a > 0\,, \\ &\frac{6000\,b}{a+b+c} - 3b \geq 0\,, &&\text{oziroma} && M \leq 2000\,, &&\text{če je} && b > 0\,, \\ &\frac{6000\,c}{a+b+c} - 4c \geq 0\,, &&\text{oziroma} && M \leq 1500\,, &&\text{če je} && c > 0\,. \end{aligned}$$

Od tod se vidi, da Nasheva ravnovesja, kjer imata natanko dva strogo pozitiven prispevek, obstajajo natanko tedaj, ko je $M \leq 2000$. Za $M = 2000$ morata biti tista s strogo pozitivnim prispevkom Aljaž in Bogdan: iskana Nasheva ravnovesja so vsi profili oblike $(a, 2000-a, 0)$, kjer je $0 < a < 2000$.

2. Prirejena strateška igra:

	L_2L_{13}	L_2D_{13}	D_2L_{13}	D_2D_{13}
A_1A_{23}	$4,4;5,5$	$4,4;5,3$	$4,4;4,5$	$4,4;4,3$
A_1B_{23}	$4,5;2,4$	$4,6;2,5$	$4,5;3,4$	$4,6;3,5$
A_1C_{23}	$4,4;3,6$	$4,5;3,3$	$4,2;2,6$	$4,3;2,3$
B_1A_{23}	$0,4;5,4$	$3,4;5,2$	$0,4;4,4$	$3,4;4,2$
B_1B_{23}	$0,5;2,3$	$3,6;2,4$	$0,5;3,3$	$3,6;3,4$
B_1C_{23}	$0,4;3,5$	$3,5;3,2$	$0,2;2,5$	$3,3;2,2$
C_1A_{23}	$5,4;5,4$	$1,4;5,3$	$5,4;4,4$	$1,4;4,3$
C_1B_{23}	$5,5;2,3$	$1,6;2,5$	$5,5;3,3$	$1,6;3,5$
C_1C_{23}	$5,4;3,5$	$1,5;3,3$	$5,2;2,5$	$1,3;2,3$

Najprej opazimo, da akcija B_{23} strogo dominira akciji A_{23} in C_{23}. Ko le-ti izločimo, akcija D_2 dominira akcijo L_2, akcija D_{13} pa dominira akcijo L_{13}. Edino mešano Bayesovo ravnovesje je torej čisto, in sicer (A_1B_{23}, D_2D_{13}).

3. Dana ekstenzivna igra še eno netrivialno podigro, in sicer tisto, kjer ima drugi igralec na voljo akcije D, E in F. V tej podigri Nashevo ravnovesje tvorita akciji D in F. Po odstranitvi akcije E se dana ekstenzivna igra prevede na naslednjo strateško igro:

$P_1 \backslash P_2$	DG	DH	FG	FH
A	$5,3$	$5,3$	$1,3$	$1,3$
B	$5,2$	$2,4$	$5,2$	$2,4$
C	$3,4$	$4,2$	$3,4$	$4,2$

Čisti Nashevi ravnovesji sta (A, DG) in (A, DH).

4. Funkcija v je superaditivna za $3 \le a \le 7$. Za $a = 3$ so imputacije in jedro prikazani na naslednji skici: