Rešitve izpita iz teorije iger z dne 6. 7. 2012

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Preferenčna funkcija prvega proizvajalca:

$$u_1(q_1, q_2) = \frac{36q_1}{q_1 + q_2 + 1} - 4q_1$$

kot funkcija spremenljivke q_1 na intervalu $[0, \infty)$ doseže maksimum bodisi pri $q_1 = 0$ bodisi v stacionarni točki, ki je ničla parcialnega odvoda:

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = \frac{36(q_2 + 1)}{(q_1 + q_2 + 1)^2} - 4$$

(velja $\lim_{q_1 \to \infty} u_1(q_1, q_2) = -\infty$). Podobno tudi preferenčna funkcija drugega proizvajalca, ki je za $q_2 > 0$ enaka:

$$u_2(q_1, q_2) = \frac{36q_2}{q_1 + q_2 + 1} - 3q_2 - c\,,$$

kot funkcija spremenljivke q_2 na intervalu $[0, \infty)$ doseže maksimum bodisi pri $q_2 = 0$ bodisi v stacionarni točki, ki je ničla parcialnega odvoda:

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = \frac{36(q_1 + 1)}{(q_1 + q_2 + 1)^2} - 3$$

(tudi tukaj velja $\lim_{q_2 \to \infty} u_2(q_1, q_2) = -\infty$, pomembno pa je tudi, da ima u_2 v izhodišču skok navzdol). Od tod dobimo štiri možnosti za kandidate za čista Nasheva ravnovesja.

Prva možnost je $q_1 = q_2 = 0$. Če je $q_2 = 0$ je $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0$ pri $q_1 = 2$ (ničle izven intervala $[0, \infty)$ ne upoštevamo). Velja $u_1(0, 0) = 0$ in $u_1(2, 0) = 16$, torej profil $q_1 = q_2 = 0$ ni čisto Nashevo ravnovesje.

Druga možnost je $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0, q_2 = 0$ ali ekvivalentno $q_1 = 2, q_2 = 0$. V tem primeru u_1 doseže maksimalno vrednost. Oglejmo si še u_2. Velja $u_2(2, 0) = 0$; nadalje, če je $q_1 = 2$, je $\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = 0$ pri $q_2 = 3$ in velja $u_1(2, 3) = 9 - c$. Profil $q_1 = 2, q_2 = 0$ je torej čisto Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko je $c \geq 9$.

Tretja možnost je $q_1 = 0, \frac{\partial u_2}{\partial u_2} = 0$ ali ekvivalentno $q_1 = 0, q_2 = \sqrt{12} - 1$. Toda ker je $\frac{\partial u_1}{\partial q_1}\big(0, \sqrt{12} - 1\big) = 3\sqrt{12} - 4 > 0$, to ne more biti čisto Nashevo ravnovesje.

Preostane še zadnja možnost, ko je $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0$ in $\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = 0$. V tem primeru iz obeh parcialnih odvodov dobimo:

$$(q_1 + q_2 + 1)^2 = 9(q_2 + 1) = 12(q_1 + 1)\,,$$

torej $q_2 = (4q_1 + 1)/3$. Ko to spet vstavimo v zgornji sistem, dobimo $q_1 = 2, q_2 = 3$. Iz primerjave vrednosti $u_1(2,3) = 4$ in $u_1(0,3) = 0$ ter $u_2(2,3) = 9 - c$ in $u_2(2,0) = 0$ dobimo, da je profil $q_1 = 2, q_2 = 3$ čisto Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko je $c \leq 9$.

Še drugače povedano, za $c < 9$ ima igra edino čisto Nashevo ravnovesje $q_1 = 2, q_2 = 3$, za $c > 9$ edino čisto Nashevo ravnovesje $q_1 = 2, q_2 = 0$, pri $c = 9$ pa ima dve čisti Nashevi ravnovesji, in sicer prej omenjena profila.

2. Označimo z $\sim$ enakost vrednosti iger. Za $a \geq 5$ iz dominacij dobimo:

$$\begin{bmatrix} 5 & a & b \\ a & a & b \\ c & c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a & b \\ c & c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

za $a \leq 5$ pa iz dominacij dobimo:

$$\begin{bmatrix} 5 & a & b \\ a & a & b \\ c & c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

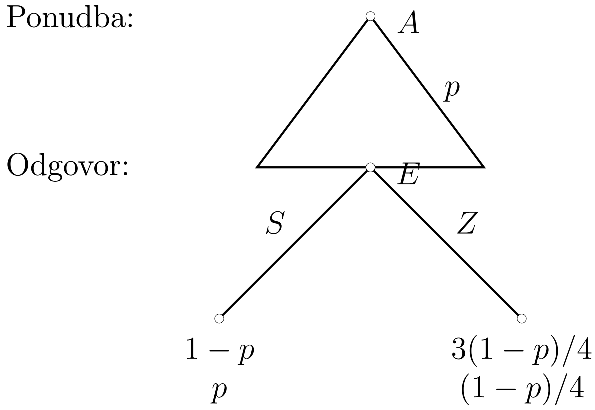
3. Najprej opazimo, da pri drugem igralcu, ki dobi signal stanja ω_2, akcija D dominira akcijo L, če dobi signal stanja ω_3, pa akcija L dominira akcijo D. Za drugega igralca s tema dvema signaloma je torej strategija jasna, za drugega igralca s signalom stanja ω_1 in prvega igralca pa dobimo strateško igro z naslednjima funkcijama koristnosti:

	L_1	D_1
A_{123}	$3, 8$	$4, 1$
B_{123}	$3˙5, 0$	$2˙5, 3$

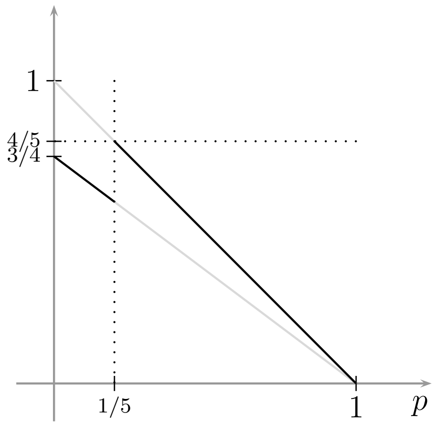
Iz tabele razberemo, da ta igra nima čistih Nashevih ravnovesij, prav tako tudi ne ravnovesij tipa čisto–mešano. Iz principa indiferentnosti razberemo, da je profil $\left(\begin{pmatrix} A_{123} & B_{123} \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_1 & D_1 \\ 1-q & q \end{pmatrix} \right)$, kjer je $0 < p, q < 1$, mešano Bayesovo ravnovesje natanko tedaj, ko velja $8 - 8p = 1 + 2p$ in $3 + q = 3˙5 - q$, torej $p = 0˙7$ in $q = 0˙25$. Sklep: edino mešano Bayesovo ravnovesje naše igre je:

$$\left(\begin{pmatrix} A_{123} & B_{123} \\ 0˙3 & 0˙7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & D_1 \\ 0˙75 & 0˙25 \end{pmatrix}, D_2 L_2 \right).$$

4. Gre za ekstenzivno igro, ki jo lahko ponazorimo z naslednjo sliko:



Oglejmo si najprej, kaj se splača storiti Egonu. Če je $p < 1/5$, se mu bolj splača zavrniti, če je $p > 1/5$, se mu bolj splača sprejeti, pri $p = 1/5$ pa se mu oboje enako splača.
Preden se lotimo vprašanja, kaj se najbolj splača storiti Albertu, moramo pokombinirati Egonove strategije v vseh možnih situacijah, v katerih se znajde. Možni sta le dve kombinaciji. Rekli bomo, da Egon ubere *ustrežljivo* strategijo, če zavrne pri $p < 1/5$ in sprejme pri $p \geq 1/5$. Nadalje bomo rekli, da ubere *zlobno* strategijo, če zavrne pri $p \leq 1/5$ in sprejme pri $p > 1/5$.
Albertov dobitek v odvisnosti od njegove ponudbe p ima naslednji graf:



pri čemer je vrednost pri $p = 1/5$ na zgornji črti, če Egon ubere ustrežljivo strategijo, in spodaj, če ubere zlobno strategijo. Če Egon ubere ustrežljivo strategijo, je maksimum v tej točki tudi dosežen, če ubere zlobno strategijo, pa maksimum ni dosežen. Edino vgnezdeno Nashevo ravnovesje je torej ($p = 1/5$, ustrežljiva strategija).