Rešitve izpita iz teorije iger z dne 21. 6. 2011

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Najprej opazimo, da pri prvem igralcu, ki dobi signal stanja ω_1, akcija A dominira akcijo B, pri drugem igralcu, ki dobi signal stanja ω_2, pa akcija D dominira akcijo L. Za igralca s tema signaloma je torej strategija jasna, torej se lahko omejimo na prvega igralca, ki dobi signal stanj ω_2 in ω_3, in drugega igralca, ki dobi signal stanj ω_1 in ω_3. Za ta dva igralca dobimo strateško igro z naslednjima funkcijama koristnosti:

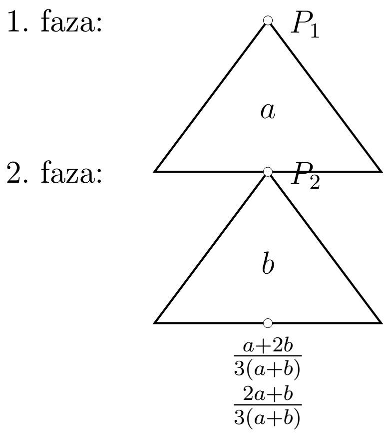
	L_{13}	D_{13}
A_{23}	$5,0$	$1,3$
B_{23}	$1,2$	$3,1$

.

S primerjanjem funkcij koristnosti hitro ugotovimo, da čistih Bayesovih ravnovesij ni, prav tako tudi ne kombinacij čisto–mešano. Iz principa indiferentnosti razberemo, da je profil $\left(\begin{pmatrix} A_{23} & B_{23} \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_{13} & D_{13} \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$, kjer je $0 < p, q < 1$, mešano Bayesovo ravnovesje natanko tedaj, ko velja $5 - 4q = 1 + 2q$ in $2p = 3 - 2p$, torej $p = \frac{3}{4}$ in $q = \frac{2}{3}$. Edino mešano Bayesovo ravnovesje dane igre je torej

$$\left(A_1 \begin{pmatrix} A_{23} & B_{23} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, D_2 \begin{pmatrix} L_{13} & D_{13} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right).$$

2. Gre za ekstenzivno igro, ki jo lahko ponazorimo z naslednjo sliko:



z dopolnilom, da sta dobitka za $a = b = 0$ enaka p in $1 - p$.
Če je $a > 0$, je v drugi fazi vgnezdeno Nashevo ravnovesje takrat, ko je $b = 0$. Za $a = 0$ pa moramo ločiti glede na p: pri $p < 2/3$ bo do vgnezdenega Nashevega ravnovesja prišlo le pri $b = 0$, pri $p = 2/3$ pri poljubni izbiri števila b, pri $p > 2/3$ pa pri poljubni izbiri $b > 0$ (obstaja torej neskončno mnogo vgnezdenih Nashevih ravnovesij).
Oglejmo si zdaj še prvo fazo. Če prvi igralec izbere $a > 0$, je njegov dobitek enak $1/3$. Če izbere $a = 0$, pa kratek premislek pokaže, da prvi igralec dobi $\min\{p, 2/3\}$, ne glede na optimalno strategijo drugega igralca. Od tod sledi, da so vgnezdena Nasheva ravnovesja naslednja:

- Če je $p < 1/3$, prvi igralec izbere kateri koli $a > 0$, drugi pa vedno izbere $b = 0$.
- Če je $p = 1/3$, prvi igralec izbere kateri koli a, drugi pa vedno izbere $b = 0$.
- Če je $1/3 < p < 2/3$, prvi igralec izbere $a = 0$, drugi pa vedno izbere $b = 0$.
- Če je $p = 2/3$, prvi igralec izbere $a = 0$, drugi pa $b = 0$, če je $a > 0$, in kateri koli b, če je $a = 0$.
- Če je $p > 2/3$, prvi igralec izbere $a = 0$, drugi pa $b = 0$, če je $a > 0$, in kateri koli $b > 0$, če je $a = 0$.

Za $1/3 < p < 2/3$ torej obstaja eno samo, sicer pa neskončno mnogo vgnezdenih Nashevih ravnovesij.

3. a) Iz zapisa ustrezne strateške igre, kjer vrstice predstavljajo Bojana, stolpci Cirila, S sodelovanje, N pa nesodelovanje:

Amanda ne sodeluje:

	N	S
N	$50, 50, 50$	$50, 50, 50$
S	$50, 50, 50$	$50, 50, 50$

Amanda sodeluje:

	N	S
N	$50, 50, 50$	$60, 50, 60$
S	$60, 60, 50$	$40, 40, 40$

dobimo, da do čistega Nashevega ravnovesja pride natanko tedaj, ko pri skupnem projektu bodisi ne sodeluje nobeden bodisi sodelujeta natanko dva igralca.

b) Če Amanda igra proti Bojanu in Cirilu, dobimo matriko dobitkov:

	NN	NS	SN	SS
N	50	50	50	50
S	50	60	60	40

,

ki ima vrednost $v(\{A\}) = 50$. Nadalje, če Bojan igra proti Amandi in Cirilu, ima matrika dobitkov:

	NN	NS	SN	SS
N	50	50	50	50
S	50	50	60	40

prav tako vrednost $v(\{B\}) = 50$. Podobno je tudi $v(\{C\}) = 50$. Če Amanda in Bojan igrata proti Cirilu, dobimo matriko dobitkov:

	N	S
NN	100	100
NS	100	100
SN	100	110
SS	120	80

z vrednostjo $v(\{A, B\}) = 104$. Podobno je tudi $v(\{A, C\}) = 104$. Če Bojan in Ciril igrata proti Amandi, pa ima matrika dobitkov:

	N	S
NN	100	100
NS	100	110
SN	100	110
SS	100	80

vrednost $v(\{B, C\}) = 100$. Končno je največji možni skupni dobitek enak $v(\{A, B, C\}) = 170$. Koeficienti pri izračunu Shapleyjevih vrednosti so torej enaki:

$$c_\emptyset = 0\,, \quad c_{\{A\}} = c_{\{B\}} = c_{\{C\}} = 50\,,$$
$$c_{\{A,B\}} = c_{\{A,C\}} = 4\,, \quad c_{\{B,C\}} = 0\,, \quad c_{\{A,B,C\}} = 12\,,$$

Shapleyjeve vrednosti pa so:

$$\phi_A = 58\,, \quad \phi_B = \phi_C = 56\,.$$