Rešitve izpita iz teorije iger z dne 16. 5. 2013

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Naj bosta akciji obeh igralcev kar r_1 in r_2. Tedaj je tržna cena blaga kar $r_1 + r_2$. Od tod dobimo koristnostni funkciji:

$$u_1(r_1, r_2) = (120 - r_1)\left[r_1 + r_2 - \left(60 - \frac{r_1}{4}\right)\right] = (120 - r_1)\left(\frac{5r_1}{4} + r_2 - 60\right),$$
$$u_2(r_1, r_2) = (120 - r_2)\left[r_1 + r_2 - \left(72 - \frac{2r_2}{5}\right)\right] = (120 - r_2)\left(r_1 + \frac{7r_2}{5} - 72\right).$$

Opazimo, da je u_1 konkavna funkcija spremenljivke r_1 in prav tako tudi r_2 konkavna funkcija spremenljivke r_2. To pomeni, da je v stacionarni točki globalni maksimum. Z drugimi besedami, če je točka, kjer je $\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = \frac{\partial u_2}{\partial r_2} = 0$, profil (torej če sta r_1 in r_2 v intervalu $[0, 120]$), je tam tudi Nashevo ravnovesje. Iz odvodov:

$$\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = 210 - \frac{5r_1}{2} - r_2\,, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial r_2} = 240 - r_1 - \frac{14r_2}{5}$$

dobimo stacionarno točko $r_1 = 58$, $r_2 = 65$, ki je po zgoraj povedanem tudi Nashevo ravnovesje. To odgovarja vrednostma $q_1 = 62$ in $q_2 = 55$.

2. Opazimo, da pri prvem igralcu, ki ve, da je v prvem stanju, akcija T strogo dominira akcijo B. Podobno pri drugem igralcu, ki je v drugem stanju, akcija L strogo dominira akcijo R. Tako lahko med akcijama izbirata le še prvi igralec, ki je v stanju ω_2 ali ω_3, in drugi igralec, ki je v stanju ω_1 ali ω_3. Za ta dva igralca dobimo naslednjo prirejeno strateško igro:

	L_{13}	R_{13}
T_{23}	$\frac{7}{4}, 2$	$2, 7$
B_{23}	$2, 4$	$\frac{9}{4}, 3$

Vidimo, da akcija B_{23} strogo dominira akcijo T_{23} (medtem ko v imamo v stanju ω_2 izvirne igre le navadno dominacijo). Ko akcijo T_{23} izločimo, vidimo, da se drugemu igralcu bolj splača igrati L_{13}. Edino mešano Bayesovo ravnovesje igre je torej $(T_1, B_{23}; L_2, L_{13})$.

3. Igra ima dve netrivialni podigri, ki sta določeni z vozliščem, kjer ima drugi igralec možni potezi C in D, in vozliščem, kjer ima drugi igralec možni potezi E in F. V prvi podigri igra le še drugi igralec in ima očitno edino čisto Nashevo ravnovesje $(\_, D)$. Druga podigra pa se prevede na strateško igro:

	E	F
G	$2, 2$	$3, 1$
H	$1, 3$	$4, 4$

ki ima čisti Nashevi ravnovesji (E, G) in (H, F). Iz kombinacij čistih Nashevih ravnovesij za obe podigri in primerjanj koristnostnih funkcij prvega igralca za akciji A in B končno dobimo čisti vgnezdeni Nashevi ravnovesji (AG, DE) in (BH, DF).

4. Najprej izračunamo:

$$v(\{1\}) = \min_{0 \le p \le 1} \max\{1 + 4p, 4 - 4p, 3 - p\} = \frac{13}{5}\,,$$
$$v(\{2\}) = \max_{0 \le p \le 1} \min\{2 + p, 1 + 5p, 4 - 4p\} = \frac{12}{5}\,.$$

Očitno je tudi $v(\{1, 2\}) = 8$. Shapleyjevi vrednosti: $\phi_1 = \dfrac{41}{10}, \quad \phi_2 = \dfrac{39}{10}$.