Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 14. 4. 2011

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. V tabeli preferenčnih funkcij elemente, pri katerih gre zagotovo za najboljši odziv, zamenjamo s kljukicami, elemente, pri katerih zagotovo ne gre za najboljši odziv, pa s črticami. Dobimo:

Tretji igralec izbere C_1:

	B_1	B_2
A_1	$\checkmark, a, b$	$/, 5, \checkmark$
A_2	$/, \checkmark, \checkmark$	$\checkmark, /, \checkmark$

Tretji igralec izbere C_2:

	B_1	B_2
A_1	$/, b, 1$	$a, 1, /$
A_2	$\checkmark, /, /$	$2, \checkmark, /$

Tretji igralec izbere C_3:

	B_1	B_2
A_1	$/, /, /$	$/, \checkmark, a$
A_2	$\checkmark, \checkmark, /$	$\checkmark, /, /$

Nasheva ravnovesja so lahko le v poljih brez črtic, edino tako polje pa je (A_1, B_1, C_1). Le-to je Nashevo ravnovesje, če je $b \geq 5$ in $b \geq 1$.

Če in samo če je $b \geq 1$, strategija C_1 dominira strategijo C_2.
Če in samo če je $a \leq 4$ in $b \geq 0$, strategija C_1 dominira strategijo C_3.
Če in samo če je $a \leq 3$, strategija C_2 dominira strategijo C_3.
Drugih dominacij ni.

2. Iz:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} u_1(q_1, q_2) = \frac{q_2}{(q_1 + q_2)^2} - c_1 \,, \qquad \frac{\partial}{\partial q_2} u_2(q_1, q_2) = \frac{q_1}{(q_1 + q_2)^2} - c_2$$

po nekaj računanja dobimo, da je Nashevo ravnovesje doseženo kvečjemu za:

$$q_1 = \frac{c_2}{(c_1 + c_2)^2} \,, \quad q_2 = \frac{c_1}{(c_1 + c_2)^2} \,.$$

Da gre tam res za Nashevo ravnovesje, t. j. da sta res dosežena ustrezna globalna maksimuma, lahko preverimo npr. z drugima parcialnima odvodoma:

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} u_1(q_1, q_2) = -\frac{q_2}{2(q_1 + q_2)^3} \,, \qquad \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} u_2(q_1, q_2) = -\frac{q_1}{2(q_1 + q_2)^3} \,.$$

3. Iz:

$$U_2\left(\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+3p \\ 3-2p \\ 5-4p \end{bmatrix} \,, \quad U_2\left(\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}, Z\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dobimo, da mešana strategija $\begin{pmatrix} X & Y \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ strogo dominira Z, brž ko je $0 < p < \frac{1}{2}$. Zato lahko strategijo Z izločimo iz iskanja Nashevih ravnovesij. Drugih dominacij pa ni.

Iz tabele hitro razberemo, da ni čistih Nashevih ravnovesij. Prav tako s pomočjo principa indiferentnosti hitro vidimo, da ni niti Nashevih ravnovesij, kjer bi bila katera od strategij čista. Z drugimi besedami, so le Nasheva ravnovesja, pri katerih oba igralca mešata strategije. Iz:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4-4q \\ 3-q \\ 3q \end{bmatrix}$$

dobimo, da je lahko Nashevo ravnovesje doseženo kvečjemu:

- če prvi igralec meša A in B: pri $q = \frac{1}{3}$;
- če prvi igralec meša A in C: pri $q = \frac{4}{7}$;
- če prvi igralec meša B in C: pri $q = \frac{3}{4}$.

Če prvi igralec meša A in B, najprej preverimo, da je:

$$U_1\left(A, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right) = U_1\left(B, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right) = \frac{8}{3} \geq U_1\left(C, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right) = 1$$

(t. j. smo na zgornji ovojnici), nakar iz:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+2p & 4-3p \end{bmatrix}$$

dobimo, da je Nashevo ravnovesje doseženo pri $p = \frac{3}{5}$.
Če prvi igralec meša A in C, velja:

$$U_1\left(A, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}\right) = U_1\left(C, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}\right) = \frac{12}{7} < U_1\left(B, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}\right) = \frac{17}{7},$$

torej tam ni Nashevega ravnovesja, ker nismo na zgornji ovojnici.
Če pa prvi igralec meša B in C, pa iz:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3+2p & 1 \end{bmatrix}$$

dobimo, da v tem primeru Nashevega ravnovesja ne more biti.
Sklep: edino Nashevo ravnovesje je pri profilu $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right)$.

4. Označimo $\pi_1 := \begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}$. Tedaj je:

$$\begin{aligned} v_1 &= \max_{0 \leq p \leq 1} \min\bigl\{U_1(\pi_1, X), U_1(\pi_1, Y), U_1(\pi_1, Z)\bigr\} = \\ &= \max_{0 \leq p \leq 1} \min\{3-3p, 1+3p, 2+p\}\,. \end{aligned}$$

Maksimum je dosežen v presečišču premic, katerih smerna koeficienta imata nasproten predznak (ničla je dovoljena), ki se nahaja na spodnji ovojnici, njegova abscisa pa je v $[0,1]$; če takega presečišča ni, je maksimum dosežen v enem od krajišč. V našem primeru imamo dve presečišči z abscisama v $[0,1]$, kot je prikazano v spodnji tabeli:

p	$3-3p$	$1+3p$	$2+p$
$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$
$\frac{1}{3}$	2	2	$\frac{7}{3}$

.

Na spodnji ovojnici leži presečišče pri $p=\frac{1}{3}$, torej je $v_1=2$.