Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 29. 11. 2011

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Ker mora vsak kupec ponuditi vsaj 1 evro, mora kupec, ki z gotovostjo dobi predmet dražbe, zanj plačati vsaj 2 evra. Torej to v Nashevem ravnovesju ne more biti Andraž, saj bi imel v tem primeru izgubo. Bolje bi naredil, če bi ponudil le 1 evro, saj tedaj bodisi z gotovostjo ne bi dobil predmeta bodisi bi ga dobil z verjetnostjo 1/5 (to bi bilo tedaj, ko bi vsi ponudili po 1 evro). V obeh primerih bi bil na ničli, kar bi bilo zanj boljše.
Nadalje opazimo, da morajo v Nashevem ravnovesju, kjer posamezen kupec z gotovostjo dobi predmet dražbe, ostali ponuditi strogo manj, kot ga on ceni. Sicer bi imel namreč zmagovalec dražbe izgubo, saj bi moral za predmet dražbe plačati vsaj 1 evro več, kot ceni predmet dražbe. Spet bi se mu bolj splačalo ponudbo znižati npr. na 1 evro.
V Nashevem ravnovesju, kjer bi Brigita zagotovo dobila predmet dražbe, bi smeli torej vsi ostali kupci ponuditi le 1 evro. Brigita bi bila tedaj na ničli. Toda če bi spustila ponudbo na 1 evro, bi imela pričakovani dobiček 1/5, kar je bolje. Torej tudi za Brigito ni Nashevega ravnovesja, kjer bi z gotovostjo dobila predmet dražbe.
Prav tako niti za Andraža niti za Brigito ni Nashevega ravnovesja, kjer bi imela strogo pozitiven pričakovani dobiček. Za Andraža ga ni, ker mora, brž ko dobi predmet dražbe, plačati vsaj 1 evro. Toda tudi Brigita bi smela, če bi hotela imeti strogo pozitiven pričakovani dobiček, za predmet dražbe plačati največ 1 evro. To je možno le, če vsi ponudijo le po 1 evro. Toda to ni Nashevo ravnovesje, saj se že Cvetu bolj splača ponuditi 2 evra.
Za vse ostale kupce pa obstaja Nashevo ravnovesje, kjer zagotovo dobijo predmet dražbe in imajo strogo pozitiven pričakovani dobiček. Oglejmo si namreč profil, ko zmagovalec ponudi vsaj 5 evrov, ostali pa ponudijo po 1 evro. Tedaj je dobiček zmagovalca vsaj 1 in tako ostane, če le ponudi več kot 1 evro. Če pa spusti ponudbo na 1 evro, se njegov pričakovani dobiček zniža na 1/5, kar je slabše. Nadalje, če naj se za katerega drugega kupca kaj spremeni, mora ponuditi vsaj 5 evrov, v tem primeru pa je pričakovano bodisi na ničli bodisi na izgubi. Torej je tak profil res Nashevo ravnovesje in zmagovalec ima zagotovljen strogo pozitiven dobiček.
Trdimo, da so ti profili za Cveta tudi edini, v katerih on zagotovo dobi predmet dražbe. Cveto v tem primeru namreč mora ponuditi najmanj 5 evrov, sicer se Edu splača dvigniti ponudbo na 4 evre in njegov pričakovani dobiček bo strogo pozitiven, ne glede na to, ali bo dobil predmet z gotovostjo ali ne. Za ostale kupce pa smo že dognali, da ponuditi manj kot 3 evre. A če bi kdo ponudil 2 evra, bi moral Cveto plačati 3 evre in bi bil na ničli. Bolj bi se mu splačalo spustiti ponudbo na 2 evra, saj bi imel v tem primeru strogo pozitiven pričakovani dobiček.

Sklepi:

a) Kupci, za katere obstaja Nashevo ravnovesje, v katerem zagotovo dobijo predmet dražbe, so Cveto, Darja in Edo.

b) Cveto, Darja in Edo so tudi kupci, za katere obstaja Nashevo ravnovesje, pri katerem imajo strogo pozitiven pričakovan dobiček.

c) Nasheva ravnovesja, pri katerih Cveto zagotovo dobi predmet dražbe, so tista, pri katerih Cveto ponudi vsaj 5 evrov, ostali pa le po 1 evro.

2. Ker akcija A strogo dominira akcijo C, lahko slednjo izločimo.
Iz tabele zlahka odčitamo čisti Nashevi ravnovesji (A, X) in (B, Z).
Poleg tega je možno, da prvi igralec meša A in B, drugi pa ubere čisto strategijo Y ali Z. Za ta namen moramo izračunati:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6-6p & 5-3p & 1+3p \end{bmatrix}.$$

Maksimum je dosežen (zgornja ovojnica):

- za $0 \le p < \frac{1}{3}$: pri X;
- za $p = \frac{1}{3}$: pri X in Y;
- za $\frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$: pri Y;
- za $p = \frac{2}{3}$: pri Y in Z;
- za $\frac{2}{3} < p \le 1$: pri Z.

Od tod dobimo skupino mešanih Nashevih ravnovesij:

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, Y\right) ; \frac{1}{3} \le p \le \frac{2}{3}, \qquad \left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, Z\right) ; \frac{2}{3} \le p \le 1.$$

Nasheva ravnovesja, kjer oba mešata, pa so lahko dosežena le pri $p = 1/3$, ko drugi igralec meša X in Y, in pri $p = 2/3$, ko meša Y in Z. Za prvi primer iz:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4-2q \\ 2q \end{bmatrix}$$

dobimo indiferentnost pri $q = 1$. Za drugi primer pa iz:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} Y & Z \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2+q \\ 2+q \end{bmatrix}$$

dobimo indiferentnost pri vseh q. Mešana Nasheva ravnovesja so torej:

$$(A, X), \qquad \left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, Y\right) ; \frac{1}{3} \le p \le \frac{2}{3},$$

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, Z\right) ; \frac{2}{3} \le p \le 1, \qquad \left(\begin{pmatrix} A & B \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y & Z \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) ; 0 \le q \le 1.$$

3. Profil (A, X) je Nashevo ravnovesje za $a \geq 2$.
Profil (B, X) je Nashevo ravnovesje za $a \leq 0$.
Profil $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, X \right)$ je mešano Nashevo ravnovesje, če je $a = 2$ in $0 \leq p \leq 1/3$.
Profil $\left(B, \begin{pmatrix} X & Y \\ 1-q & q \end{pmatrix} \right)$ je mešano Nashevo ravnovesje, če je $a = 0$ in $0 \leq q \leq 2/3$.
Profil $\left(\begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{a}{a+1} & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{1}{3-a} & \frac{2-a}{3-a} \end{pmatrix} \right)$ je mešano Nashevo ravnovesje, če je $0 \leq a \leq 2$.
Drugih mešanih Nashevih ravnovesij ni.

4. Če z A označimo matriko igre, se splača vrednost igre iskati kot:

$$\max_{0 \leq p \leq 1} \min \begin{bmatrix} 1-p & p \end{bmatrix} A = \max_{0 \leq p \leq 1} \left\{ 6-p, 4+2p, 1+8p, 8-4p, 3+5p \right\},$$

torej kot maksimum spodnje ovojnice stolpcev, ki jih označimo z $S_1, \ldots S_5$. Spodnjo ovojnico tvorijo:

- S_3 za $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$;
- S_2 za $\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{2}{3}$;
- S_1 za $q = \frac{2}{3}$;
- S_4 za $\frac{2}{3} \leq p \leq 1$.

Stolpec S_5 pa je strogo dominiran recimo z $\begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

No, tudi stolpec S_1 je kar enak $\begin{pmatrix} S_2 & S_4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Vrednost igre je dosežena pri $p = 2/3$ in je enaka $16/3$.