Rešitve kolokvija iz teorije iger z dne 30. 11. 2012

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Iz preferenčne funkcije drugega igralca dobimo naslednje najboljše odgovore tega igralca:

- Če prvi igralec igra A, je $q = 1$.
- Če prvi igralec igra B, je $q = 0$.
- Če prvi igralec igra C, je $q = 2/3$.

Zdaj pa si pri teh najboljših odgovorih oglejmo oglejmo najboljše odgovore prvega igralca:

- Če je $q = 0$, sta najboljša odgovora B in C.
- Če je $q = 2/3$, je najboljši odgovor C.
- Če je $q = 1$, je najboljši odgovor C.

Nashevi ravnovesji sta torej $(B, 0)$ in $(C, 2/3)$.

2. Igralci so proizvajalci, akcije so zneski, ki jih vložijo v marketing. Ker je tržni delež d_i sorazmeren z x_i, mora biti: $d_i = x_i/s$, kjer je $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Koristnostna funkcija i-tega igralca je torej enaka:

$$u_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = a\,\frac{x_i}{s} - x_i = a\,\frac{x_i}{s_i + x_i} - x_i\,,$$

kjer je $s_i = s - x_i$. Poiskati je potrebno najboljši odgovor pri fiksnih akcijah x_j, $j \neq i$. Limita funkcije u_i, ko gre x_i z desne proti nič, je enaka nič, ko gre x_i proti neskončno, pa gre u_i proti minus neskončno. Najboljši odgovor bo torej dosežen kvečjemu v stacionarni točki. Za ta namen izračunajmo parcialni odvod:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = a\,\frac{s_i}{s^2} - 1 = a\,\frac{s_i}{(s_i + x_i)^2} - 1\,.$$

Ni sicer vnaprej jasno, da je parcialni odvod sploh pri kakšnem $x_i > 0$ enak nič. Toda iz drugega parcialnega odvoda:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = -2a\,\frac{s_i}{(s_i + x_i)^3}$$

dobimo, da je funkcija u_i konkavna funkcija spremenljivke x_i. Od tod pa sledi, da najboljši odgovor obstaja, brž ko je pri nekem $x_i > 0$ prvi parcialni odvod enak nič. Nasheva ravnovesja so torej natanko točke, kjer so vsi parcialni odvodi enaki nič. Po seštetju enačb dobimo $(n-1)a/s = n$, torej $s = (n-1)a/n$, torej:

$$x_i = \frac{(n-1)a}{n^2}\,.$$

Ker je to strogo pozitivno, je tam res doseženo edino čisto Nashevo ravnovesje.

3. To se lahko zgodi kvečjemu v naslednjih dveh primerih:

- $a = 3$, prvi igralec meša A in C, drugi igralec igra X;
- $a = 5$, prvi igralec meša B in C, drugi igralec igra Y.

V mešanem Nashevem ravnovesju smo, če je strategija drugega igralca dejansko najboljši odgovor. V prvem primeru velja:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3-p & 4-4p & 3p \end{bmatrix}.$$

V mešanem Nashevem ravnovesju bomo, če bo $3 - p \geq 4 - 4p$ in $3 - p \geq 3p$. To se zgodi za $1/3 \leq p \leq 3/4$.

V drugem primeru pa velja:

$$U_2\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3-p & 2-2p & 1+2p \end{bmatrix}.$$

V mešanem Nashevem ravnovesju bomo, če bo $2 - 2p \geq 3 - p$ in $2 - 2p \geq 1 + 2p$. Toda prva neenakost ni izpolnjena za noben $0 \leq p \leq 1$, torej takih mešanih Nashevih ravnovesij ni.

Sklep: iskana mešana Nasheva ravnovesja so $\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}, X\right)$; $1/3 \leq p \leq 3/4$.

4. Najprej opazimo, da je akcijo A strogo dominira mešanica $\begin{pmatrix} B & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, brž ko je $1/3 < p < 1/2$. Torej lahko akcijo A odstranimo. Po odstranitvi mešanica $\begin{pmatrix} Y & Z \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ dominira akcijo W, brž ko je $1/4 < q < 1/2$. Torej lahko odstranimo tudi akcijo W. Nadaljnjih dominacij ni.

Okleščena igra ima čisti Nashevi ravnovesji (B, Y) in (C, Z). Kombinacij tipa čisto–mešano ni. Preostanejo le še presečišča na zgornji ovojnici:

$$\max U_2\left(\begin{pmatrix} B & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 8-4p & ;\ 0 \leq p \leq 1/2 \\ 4+4p & ;\ 1/2 \leq p \leq 4/5 \\ 9p & ;\ 4/5 \leq p \leq 1 \end{cases}.$$

Presečišči sta torej pri $p = 1/2$, ko prvi igralec meša X in Y, in pri $p = 4/5$, ko prvi igralec meša X in Z. Toda v prvem primeru prvi igralec ne more biti indiferenten, ker ima pri akciji B v vsakem primeru večji dobitek kot pri C, v drugem primeru pa iz:

$$U_1\left(\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} X & Z \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3-2q \\ 2+2q \end{bmatrix}$$

dobimo, da je prvi igralec indiferenten pri $q = 1/4$. Mešana Nasheva ravnovesja so torej:

$$(B, Y),\ (C, Z) \quad \text{in} \quad \left(\begin{pmatrix} B & C \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Z \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\right).$$