Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 26. 1. 2012

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. a) Igra ima 6 stanj glede na to, katero nagrado dobi posamezen igralec – recimo AB, AC, BA, BC, CA in CB. Prvi igralec lahko dobi signale $A*$, $B*$ in $C*$, drugi igralec pa $*A$, $*B$ in $*C$, pač glede na to, katero nagrado je posamezen igralec dobil. Če prvi igralec prejme signal $A*$, je aposteriorna (pogojna) porazdelitev stanj enaka $\begin{pmatrix} AB & AC \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ in podobno tudi za ostala dva signala in za drugega igralca.

Vsak igralec ima dve možni akciji: *menjati* (M) ali *ne menjati* (N). Do menjave pride, če sta obe akciji enaki M. Od tod dobimo naslednje tabele koristnostnih funkcij po stanjih:

AB

	N	M
N	$1,1$	$1,1$
M	$1,1$	$3,4$

AC

	N	M
N	$1,2$	$1,2$
M	$1,2$	$4,4$

BA

	N	M
N	$3,4$	$3,4$
M	$3,4$	$1,1$

BC

	N	M
N	$3,2$	$3,2$
M	$3,2$	$4,1$

CA

	N	M
N	$4,4$	$4,4$
M	$4,4$	$1,2$

CB

	N	M
N	$4,1$	$4,1$
M	$4,1$	$3,2$

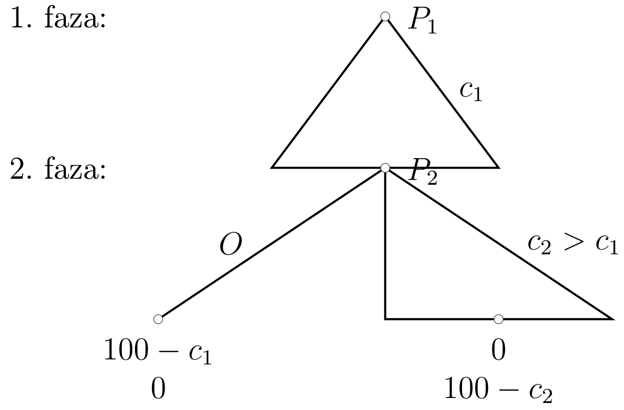
b) V Bayesovem ravnovesju prav gotovo ne pride do menjave nagrad, ki imata za igralca najvišjo možno vrednost, t. j. prvi igralec ne bo zamenjal nagrade C, drugi igralec pa ne nagrade B. Oglejmo si zdaj profil, pri katerem je vsak igralec pripravljen zamenjati vsako nagrado razen najvišje, t. j. profil:

$$(M_{A*}M_{B*}N_{C*}, N_{*A}M_{*B}M_{*C}) \,.$$

Koristnostne funkcije igralcev z ustreznimi signali v prirejeni strateški igri s popolno informacijo so za ta profil enake $(3{\cdot}5, 3{\cdot}5, 4; 4, 2{\cdot}5, 2{\cdot}5)$, kar je večje ali enako $(1, 3, 3{\cdot}5; 2{\cdot}5, 1, 2)$ – koristnostnim funkcijam posameznih igralcev s signali za primer, ko zamenjajo akcijo. Zato je profil $(M_{A*}M_{B*}N_{C*}, N_{A*}M_{B*}M_{C*})$ Bayesovo ravnovesje, v njem pa lahko pride do vseh menjav, ki jih nismo izključili, t. j. $A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow C$ in $B \leftrightarrow C$.

c) Profil, pri katerem nobeden ni nikoli pripravljen menjati, je Bayesovo ravnovesje, ker se, če je določen igralec pri določenem signalu (t. j. določeno nagrado) pripravljen menjati, njegova koristnostna funkcija ne spremeni. Ta profil je torej čisto Bayesovo ravnovesje, pri katerem nikoli ne pride do menjave.

2. Označimo s c_1 ponudbo prvega, s c_2 pa morebitno ponudbo drugega igralca. Gre za ekstenzivno igro, ki jo lahko ponazorimo z naslednjo sliko:



Oglejmo si najprej drugo fazo. Če prvi igralec ponudi 100 ali več, mora drugi igralec odstopiti, če ponudi 98 ali manj, mora ponuditi $c_1 + 1$. Če pa prvi igralec ponudi 99, je drugemu igralcu vseeno, ali ponudi 100 ali pa odstopi. V prvem primeru bomo rekli, da ubere *provokativno*, v drugem pa, da ubere *konservativno* strategijo. V ta dva pojma zajamemo tudi prej omenjene nedvoumne reakcije drugega igralca.
Oglejmo si zdaj prvo fazo. Če drugi igralec ubere konservativno strategijo, bo prvi igralec dobil $100 - c_1$, če je $c_1 \geq 99$, sicer pa 0. To doseže maksimum pri $c_1 = 99$. Če pa drugi igralec ubere provokativno strategijo, bo prvi igralec dobil $100 - c_1$, če je $c_1 \geq 100$, sicer pa 0. To pa je lahko enako največ 0, in sicer pri $c_1 = 1, 2, \ldots 100$. Vgnezdena Nasheva ravnovesja so torej:

$$(99, \text{ konservativna strategija}) \quad \text{in} \quad (c_1, \text{ provokativna strategija})\,; \; c_1 = 1, 2, \ldots 100\,.$$

3. Če se igralca sporazumeta, si razdelita maksimalni skupni dobitek $\sigma = 9$. Delitev temelji na vrednosti matrike:

$$A - B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kombinacija vrstic, ki jo predstavlja vektor $(1-p, p, 0)$, kjer je $2/5 < p < 1/2$, strogo dominira tretjo vrstico. Ko jo odstranimo, kombinacija stolpcev, ki jo predstavlja vektor $(1 - q, 0, q)$, kjer je $1/2 < q < 2/3$, strogo dominira drugi stolpec. Torej je:

$$\begin{aligned} D = v(A - B) &= \max_{0 \leq p \leq 1} \min \begin{bmatrix} 1 - p & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \max_{0 \leq p \leq 1} \min\{-5 + 10p, \; 3 - 2p\} = \\ &= \max_{0 \leq p \leq 1} \begin{cases} -5 + 10p & ;\; 0 \leq p \leq 2/3 \\ 3 - 2p & ;\; 2/3 \leq p \leq 1 \end{cases} = \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

in maksimum je dosežen pri $p = 2/3$. Velja tudi:

$$
\begin{aligned}
D &= \min_{0 \le q \le 1} \max \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-q \\ q \end{bmatrix} = \\
&= \max_{0 \le q \le 1} \min\{-5+8q,\ 5-4q\} = \\
&= \max_{0 \le q \le 1} \begin{cases} -5+8q & ;\ 0 \le q \le 5/6 \\ 5-4q & ;\ 5/6 \le q \le 1 \end{cases} = \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

in minimum je dosežen pri $q = 5/6$. Rešitev igre:

$$\left(\frac{\sigma + D}{2}, \frac{\sigma - D}{2}\right) = \left(\frac{16}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

Zaradi stroge dominacije je $\big((1/3, 2/3, 0), (1/6, 0, 5/6)\big)$ edino Nashevo ravnovesje matrične igre z matriko $A - B$, torej obstaja tudi ena sama točka nesporazuma:

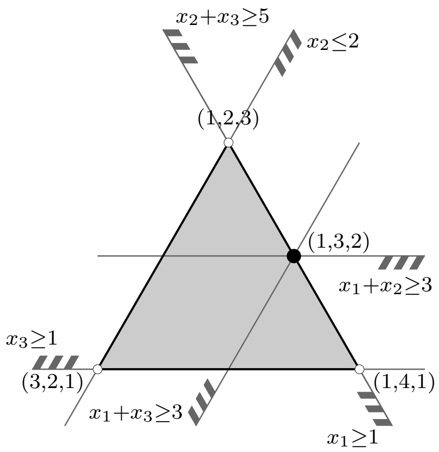
$$D_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 5/6 \end{bmatrix} = \frac{25}{6}, \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 5/6 \end{bmatrix} = \frac{5}{2}.$$

4. a) Iz $v(\{2,3\}) \ge v(\{2\}) + v(\{3\})$ sledi $t \ge 3$, iz $v(\{1,2,3\}) \ge v(\{1\}) + v(\{2,3\})$ pa sledi $t \le 5$. Ostale relacije superaditivnosti vedno veljajo, torej je v superaditivna za $t \in [3,5]$.

Če z (x_1, x_2, x_3) označimo delitev dobitka velike koalicije, je jedro določeno z naslednjo enačbo in neenačbami:

$$
\begin{gathered}
x_1 + x_2 + x_3 = 6\,, \\
x_1 \ge 1\,, \quad x_2 \ge 2\,, \quad x_3 \ge 1\,, \\
x_1 + x_2 \ge 4\,, \quad x_1 + x_3 \ge 3\,, \quad x_2 + x_3 \ge 5\,.
\end{gathered}
$$

Rešitev je ena sama točka $(1,3,2)$. Slika:



Za izračun Shapleyjevih vrednosti tabelirajmo prispevke posameznikov h koaliciji za vse možne vrstne rede pristopanja:

Vrstni red	1	2	3
$1, 2, 3$	1	3	2
$1, 3, 2$	1	3	2
$2, 1, 3$	2	2	2
$2, 3, 1$	1	2	3
$3, 1, 2$	2	3	1
$3, 2, 1$	1	4	1
Povprečje	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{11}{6}$

Shapleyjeve vrednosti so torej $\phi_1 = 4/3$, $\phi_2 = 17/6$ in $\phi_3 = 11/6$.