Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 21. 1. 2013

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Prirejena strateška igra:

$P_{1;\{\omega_1,\omega_2\}}, P_{1;\{\omega_3\}} \backslash P_{3;\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}$	L	D
AA	$5, 1; 2$	$6, 5; 3$
AB	$5, 2; 5$	$6, 3; 1$
BA	$4, 1; \frac{15}{4}$	$4, 5; 6$
BB	$4, 2; \frac{27}{4}$	$4, 3; 4$

Opazimo, da akcija A pri igralcu $P_{1;\{\omega_1,\omega_2\}}$ dominira akcijo B, tako da se naloga prevede na naslednjo igro:

$P_{1;\{\omega_3\}} \backslash P_{3;\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}$	L	D
A	$1, 2$	$5, 3$
B	$2, 5$	$3, 1$

Ta igra ima čisti Nashevi ravnovesji (B, L) in (A, D). Kombinacij čisto–mešano ni, za popolnoma mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & D \\ 1-q & q \end{pmatrix} \right)$$

pa iz principa indiferentnosti dobimo sistem enačb:

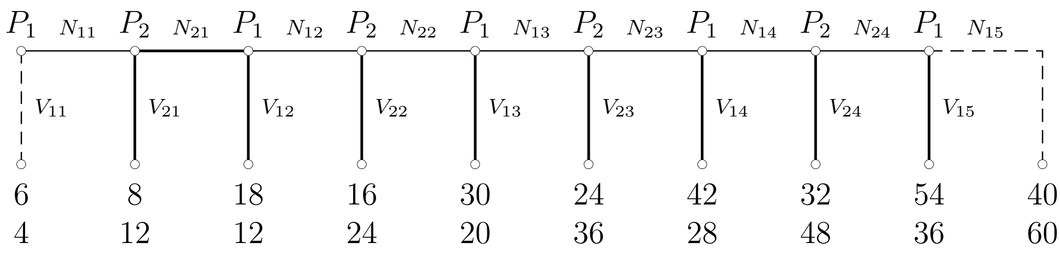
$$1 + 4q = 2 + q\,, \qquad 2 + 3p = 3 - 2p$$

z rešitvijo $p = 1/5$, $q = 1/3$. Mešana Bayesova ravnovesja so torej:

$$\begin{pmatrix} P_{1;\{\omega_1,\omega_2\}}: & P_{1;\{\omega_3\}}: & P_{3;\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}: \\ A & B & L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_{1;\{\omega_1,\omega_2\}}: & P_{1;\{\omega_3\}}: & P_{3;\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}: \\ A & A & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P_{1;\{\omega_1,\omega_2\}}: & P_{1;\{\omega_3\}}: & P_{3;\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}: \\ A & \begin{pmatrix} A & B \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L & D \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

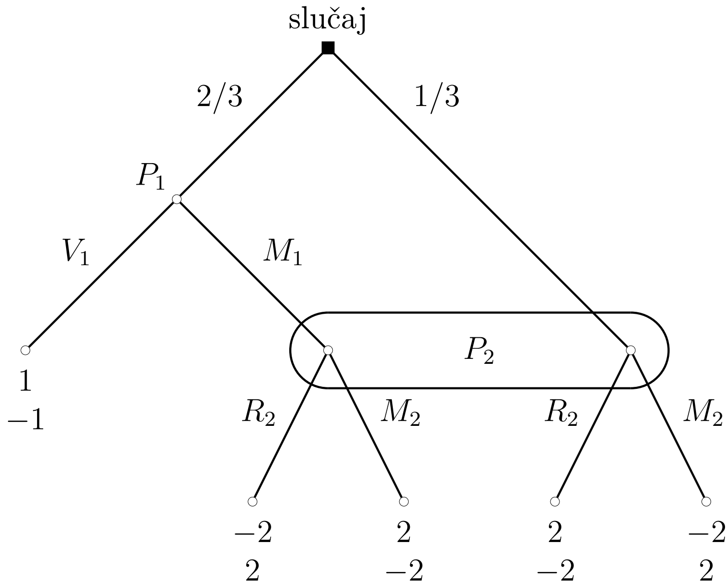
2. Drevo pripadajoče ekstenzivne igre:



Vgnezdeni Nashevi ravnovesji:

$$(N_{11}V_{12}V_{13}V_{14}V_{15},\, V_{21}V_{22}V_{23}V_{24}) \quad \text{in} \quad (N_{11}V_{12}V_{13}V_{14}V_{15},\, N_{21}V_{22}V_{23}V_{24})$$

3. To lahko modeliramo z naslednjo ekstenzivno igro z nepopolno informacijo:



ki ji pripada naslednja strateška igra:

$P_1 \backslash P_2$	R_2	M_2
V_1	$\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$	$0, 0$
M_1	$-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

Čistih Nashevih ravnovesij ni, prav tako tudi ne ravnovesij tipa čisto–mešano. Za popolnoma mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} V_1 & M_1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_2 & M_2 \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$$

pa iz principa indiferentnosti dobimo sistem enačb:

$$4 - 6p = 2p\,, \qquad 4 - 4q = -2 + 4q$$

z rešitvijo $p = 1/2$, $q = 3/4$. Igra ima torej edino mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\begin{pmatrix} V_1 & M_1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_2 & M_2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\right).$$

4. Dani igri pripada naslednja matrična igra:

	L	D
A	4	0
B	0	4
C	2	3

Zgornjo ovojnico pripadajoče koristnostne funkcije prvega igralca pri mešani strategiji $\begin{pmatrix} L & D \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ drugega igralca tvorijo naslednje akcije prvega igralca:

- A za $0 \leq q < \frac{2}{5}$;
- A in C za $q = \frac{2}{5}$;
- C za $\frac{2}{5} < q < \frac{2}{3}$;
- C in B za $q = \frac{2}{3}$;
- B za $\frac{2}{3} < q \leq 1$.

Minimum je dosežen pri $q = 2/5$, kjer prvi igralec meša A in C. Od tod že dobimo vrednost igre $v_0 = 12/5$. Ker je maksimalni skupni dobitek v prvotni igri enak $\sigma = 10$, od tod dobimo naslednjo delitev dobitka:

$$\left(\frac{10 + \frac{12}{5}}{2}, \frac{10 - \frac{12}{5}}{2}\right) = \left(\frac{31}{5}, \frac{19}{5}\right) = (6{\cdot}2, 3{\cdot}8)\,.$$

Za izračun točke nesporazuma je potrebno do konca izračunati Nashevo ravnovesje pripadajoče matrične igre (grozilni profil). Iz principa indiferentnosti za koristnostno funkcijo drugega igralca pri mešani strategiji $\begin{pmatrix} A & C \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ prvega igralca dobimo enačbo $4 - 2p = 3p$, ki ima rešitev $p = 4/5$. Grozilni profil je torej:

$$\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & D \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}\right).$$

To pomeni, da v primeru nesporazuma prvi igralec dobi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{132}{25} = 5{\cdot}28\,,$$

drugi igralec pa:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{72}{25} = 2{\cdot}88\,.$$